AL-KHWĀRIZMĪ ET LE FONDEMENT AXIOMATIQUE DE L'ALGÈBRE

Nicolas Farès
Équipe d'étude et de recherche sur la tradition scientifique arabe, faculté des sciences, université libanaise et CNRS- Liban
nfares55@hotmail.com

(Received 15 October 2014 - Accepted 20 January 2015)

RÉSUMÉ

Cet article souligne les éléments pouvant constituer un fondement axiomatique de l'algèbre tels qu'ils se présentent dans le livre algébrique d'al-Khwārizmī (9^e^ siècle) et tels qu'ils ont été développés dans plusieurs ouvrages arabes ultérieurs. Il donne une idée sur le développement et l'indépendance de cette discipline née du mariage entre la géométrie et l'arithmétique. Une lecture approfondie de certains détails du texte d'al-Khwārizmī montre son intention de lancer les bases axiomatiques de cette nouvelle discipline. Son recours à des moyens arithmétiques et géométriques était une façon de rendre sa théorie plus accessible au lecteur, et une sorte de justification des axiomes: ceux qui ne sont pas introduits explicitement en tant que tels, et ceux qui sont restés implicites. L'article se base également sur des écrits de certains successeurs d'al-Khwārizmī (déjà publiés ou encore inédits) qui nous éclairent sur la manière dont ils ont pu consolider le fondement et les méthodes de cette nouvelle discipline.

Mots-clés: Al-Khwārizmī, fondement axiomatique de l'algèbre, successeurs d'al-Khwārizmī, manuscrits non édités

ABSTRACT

This paper intends to investigate the axiomatic foundations of algebra, as they were presented in the book of algebra of al-Khwārizmī (9^th^ century), and as they were developed in many subsequent Arabic works. The paper gives also a description of algebra evolution towards a discipline independent of geometry and arithmetic: the two disciplines whose marriage had led to its birth. By an in-depth reading of some details in the text of al-Khwārizmī, we concluded that this mathematician intended to lay down the axiomatic foundations of that new discipline. His resort to arithmetical and geometrical means was a way of making his theory more accessible. He used them to justify the axioms: those that were not explicitly introduced per se, and those that were remained implicit. The paper also relies on some unedited writings of al-Khwārizmī's successors, which could shed light on the ways they used to consolidate the foundations of algebra and improve its methods.

Keywords: Al-Khwārizmī, axiomatic foundations of algebra, al-Khwārizmī's successors, inedited manuscripts

INTRODUCTION

Dans cet article, nous essayons de saisir les éléments pouvant constituer un fondement axiomatique de l'algèbre, tels qu'ils se présentent dans le livre algébrique d'al-

Khwārizmī (composé entre les années 813 et 833) et tels qu'ils ont été développés dans plusieurs ouvrages arabes postérieurs.

Le livre d'al-Khwārizmī était connu dans les milieux scientifiques, depuis 1830, grâce à Frédéric Rosen qui l'a étudié, commenté et en a présenté une édition avec sa traduction en anglais (Rosen, 1986). Plus tard, en 1937, ʿAli Mustapha Musharrafah a réalisé un travail analogue à celui de Rosen, en langue arabe (Musharrafah, 1937) en présentant une autre édition[1]; ces deux éditions sont pourtant non critiques et faites à partir d'un même et seul manuscrit: celui d'Oxford[2]. Parmi plusieurs autres études qui ont succédé aux études précédentes, accompagnées souvent de fragments du même manuscrit, on doit citer surtout celle de A. Anbouba faisant partie de son article riche en renseignements historiques: "*L'algèbre arabe aux IX*^{e} *et X*^{e} *siècles – Aperçu général*" (Anbouba, 1978)[3], et celle de R. Rashed occupant le premier chapitre de son "*Entre arithmétique et algèbre*" (Rashed, 1984).

Cette présente étude se base principalement sur le texte édité du livre d'al-Khwārizmī qui se trouve dans le livre de R. Rashed intitulé : «*Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*»[4] paru en 2007. C'est parce que l'auteur y présente une édition critique du texte du livre d'al-Khwārizmī, se basant sur cinq manuscrits supplémentaires[5] et sur la traduction faite par Gérard de Crémone (1114-1178), jugée comme étant la meilleure parmi les traductions latines anciennes[6]. De plus, l'auteur présente une traduction française du texte d'al-Khwārizmī, faite pour la première fois, et une étude mathématique et historique de son contenu, enrichie par les nouvelles connaissances en histoire des sciences accumulées pendant les cinq dernières décennies. Cette étude éclaircit certains points concernant le texte, notamment son titre[7]. Elle traite la question de l'originalité du travail d'al-Khwārizmī et celle de ses sources[8] -questions étroitement liées-, en prouvant que l'algèbre a "*commencé*" avec le

---

[1] Qualifiée par R. Rashed de « *meilleure* » (Rashed, 2007, p. 90).

[2] Voir la bibliographie, (al-Khwārizmī, 1342) 1342 est l'année où le copiage de ce manuscrit a été achevé.

[3] Dix ans plus tôt, A. Anbouba avait déjà publié un petit manuel, moins important, intitulé : "*Notes sur l'algèbre d'al-Khwārizmī*", Publications de l'Université Libanaise, Beyrouth, 1968 : "إحياء الجبر"، درس لكتاب الخوارزمي في "الجبر والمقابلة".

[4] (Rashed, 2007), que nous avons traduit en arabe sous le titre « *Les mathématiques d'al-Khwārizmī – fondement de l'algèbre*» et dont nous avons rédigé une introduction de la version arabe**.** L'accord donné par l'auteur à la substitution du mot « fondement » au mot « commencement » dans le titre de la version arabe est significatif ; il justifie, en quelque sorte, la rédaction du présent article.

[5] Seuls deux manuscrits dont l'auteur signale l'existence (ceux de Kaboul) n'ont pas pu contribuer à cette édition.

[6] On connaît deux autres traductions latines, celle de Robert de Chester en 1145 et celle de Guillaume de Luna (1110-1180).

[7] Le livre n'a, explicitement, pas de titre. Anbouba pense que ce fait est dû à une pratique courante de l'époque (Anbouba, 1978, p. 68). Rashed prouve que le titre du livre est « *kitāb al-jabr wa al-muqābala* » (le livre *d'al-jabr* et d'*al-muqābala*) et non « *al-kitāb al- mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala* » (*le livre concis dans le calcul d'al-jabr et d'al-muqābala*), comme on l'entendait jusqu'à présent à la suite de l'édition de Frederic Rosen qui lui donnait par erreur ce titre (Rashed 2007, pp. 9-11). Une telle mise à jour est importante car, l'adjectif « conçis » qualifiant le livre dans le titre de F. Rosen (1831) pourrait laisser supposer l'existence d'une version non concise de cette algèbre, antérieure à celle d'al-Khwārizmī, ce qui risque de faire perdre de vue la période du commencement de l'algèbre et d'embrouiller davantage la question des origines de cette science.

[8] R. Rashed prouve qu'al-Khwārizmī a eu connaissance des *Eléments* d'Euclide et en particulier du livre II de cette œuvre. Il prouve aussi qu'il a connu, de près, certains travaux géométriques d'Héron d'Alexandrie (1er s. av. J-C) dont il a utilisé quelques problèmes. Il infirme l'idée considérant *les Arithmétiques* de Diophante comme une source du livre d'al-Khwārizmī. Enfin, il écarte la possibilité de

livre de ce mathématicien du début du 9^{e} siècle et non avant lui. Elle aboutit à une évaluation de la portée mathématique de ce livre et met notamment l'accent sur deux types de démonstration en algèbre, apparus dans ce livre et développés ultérieurement dans l'algèbre arabe. Ces deux types sont d'après R. Rashed: "*la démonstration par la cause*" (*i.e*. géométrique) et "*la démonstration par l'expression*" (*i.e*. algébrique).

Cette présente étude se base sur l'examen de certains détails, du texte d'al-Khwārizmī, qui nous semblent indiquer son intention de lancer les bases axiomatiques de la nouvelle discipline qu'il introduit. Cet examen nous fait penser que son recours à des moyens arithmétiques et géométriques était une façon de rendre sa théorie plus accessible au lecteur, et une sorte de justification des axiomes: ceux qui ne sont pas introduits explicitement en tant que tels, et ceux qui sont restés implicites. Nous nous appuyons aussi sur des textes revenant aux successeurs d'al-Khwārizmī, dont la plupart sont édités et étudiés par R. Rashed, ainsi que sur des textes manuscrits inédits[9] qui donnent une idée sur la manière dont les successeurs d'al-Khwārizmī ont pu consolider le fondement et les méthodes de cette nouvelle discipline.

APERÇU SUR LA PARTIE THÉORIQUE DU LIVRE ALGÉBRIQUE D'AL-KHWĀRIZMĪ

Les chapitres théoriques du livre d'al-Khwārizmī se trouvent dans sa première partie (pp. 92-143)[*], (al-Khwārizmī, 1342, ff. 2^{r}-8^{r}; Rosen, 1986, pp. 3-23; Musharrafah, 1937, pp. 16-34). Les autres chapitres peuvent, être regroupés en trois parties:

- un chapitre consacré aux applications numériques illustrant la théorie exposée dans la première partie du livre. Al-Khwārizmī y résout des problèmes numériques pratiques en les ramenant à des équations algébriques (pp. 144-201), (al-Khwārizmī, 1342, ff. 8^{r}-15^{r}; Rosen, 1831, pp. 24-48; Musharrafah,1937, pp. 34-50);
- une partie géométrique, où il s'agit de calcul d'aires de figures planes et de certains calculs métriques dans ces figures; (le seul volume qu'on y trouve est celui du cône). Certains de ces problèmes y sont ramenés à des équations algébriques. On y trouve aussi, citées, trois valeurs approchées de π: $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$ et 3,1416, dont les deux dernières y sont attribuées à la tradition indienne (pp. 202-231), (al-Khwārizmī, 1342, ff. 15^{r}-18^{v}; Rosen, 1831, pp. 48-64; Musharrafah, 1937, pp. 54-66);
- une assez longue partie contenant plusieurs problèmes de succession (legs, héritage) résolus après avoir été ramenés à des équations algébriques (pp. 232-331), (al-Khwārizmī, 1342, ff. 18^{v}-34^{r}; Rosen, 1831, pp. 65-122; Musharrafah, 1937, pp. 67-106).

La lecture de la partie théorique du livre montre que:

1) Al-Khwārizmī introduit ce qu'on appelle de nos jours, les termes primitifs de sa théorie:

- "*al-jidhr*" ou aussi, « *al-jadhr* », ("*la racine*"), qu'on note x de nos jours, qu'il appelle aussi « *al-shay'* » c.à.d. "*la chose*" ; ce terme indique l'inconnu dans les équations, mais aussi, l'indéterminée dans un polynôme ;

---

considérer les travaux indiens (ceux de Brahmagupta et Aryabhata, en particulier) comme des sources du livre d'al-Khwārizmī (Rashed, 2007, pp. 61-79).

[9] Voir la bibliographie: "Al-Karajī, Abū Bakr, I", "Al-Karajī, Abū Bakr, II" et "Auteur inconnu".

* Lire (Rashed, 2007, pp. 92-143); la référence à ce livre étant fréquente, nous allons, dans la suite aussi, en nous y référant, ne mentionner que les numéros des pages, omettant le nom de l'auteur et l'année de la publication.

- "*al-māl*" ("le bien" -ce qu'on possède-), qui est le carré x^2 de la *chose*, c. à. d. "*ce qui se produit de la multiplication de la racine par elle-même*".

- "*le nombre simple*" ("*al-'adad al-mufrad*"), c.à.d. le terme constant d'une équation mais aussi le terme de degré 0 d'un polynôme; les *nombres simples*, sont pour lui, des nombres rationnels positifs.

2) Il introduit, ensuite, le concept d'équation en introduisant les équations du premier et du second degré. Il introduit la notion de ce qu'on appelle de nos jours la «*forme normale*» ou « *canonique* » d'une équation, les formules (algorithmes) de leurs solutions et les justifications géométriques de ces algorithmes. On peut schématiser sa démarche de la façon suivante:

a) Il classe les équations de degré ≤ 2 en six types:

$$\text{(I) } ax^2 = bx \quad , \quad \text{(II) } ax^2 = c \quad , \quad \text{(III) } bx = c$$

$$\text{(IV) } ax^2 + bx = c \ , \quad \text{(V) } ax^2 + c = bx \ , \text{(VI) } ax^2 = bx + c$$

où a, b, c sont des rationnels positifs[10].

b) Pour chacune de ces équations[11], il donne la forme normale correspondante (où le coefficient a de la puissance la plus élevée de l'inconnue, est 1).

c) Il donne la formule algorithmique de la solution pour chacun de ces types, réduit à sa forme normale avec la condition d'existence de racines (réelles)[12]. Ces formules sont celles que nous utilisons aujourd'hui: $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c}$ (si on écrit l'équation sous la forme moderne : $ax^2 + bx + c = 0$). Notons qu'il a négligé les racines négatives[13]. Ces formules sont tout à fait générales: les valeurs numériques qui accompagnent parfois les exposés sont introduites, évidemment, pour des raisons didactiques et n'influent en rien, ni sur la généralité des sujets traités ni sur la rigueur du style.

d) Il présente une justification géométrique pour l'algorithme de la solution de chacune des équations trinômes du 2e degré, réduite à sa forme canonique.

e) Immédiatement après, il donne, d'une manière abstraite, les formules permettant de calculer les expressions algébriques, qu'on peut écrire dans un langage moderne sous la forme:

(1) $(a \pm bx).(\pm c \pm dx)$,

(2) $(ax \pm b) \pm (\pm cx \pm d)$,

(3) $\left(\pm ax^2 \pm bx \pm c\right) \pm \left(\pm a'x^2 \pm b'x \pm c'\right)$,

où a, b, c, ..., sont des rationnels positifs, marquant ainsi le commencement du calcul polynomial.

On note, enfin, que des règles de calcul telles que

---

[10] La multitude des types vient du fait qu'à l'époque on ignorait la notion de nombres négatifs. Cela a entraîné le refus de l'écriture de l'équation sous la forme $p(x)=0$. "*Ce refus subsistera encore pendant de nombreux siècles et laisse encore des traces dans la Géométrie de Descartes*" (p. 23, n. 38).

[11] À l'exception de l'équation (III).

[12] Dans le cas où la question d'existence se pose, i.e pour le type V.

[13] Cette négligence subsistera encore pendant de nombreux siècles jusqu'à même *la Géométrie* de Descartes (1596-1650), pour lequel ces racines sont les "*fausses racines*" (Ch. Adam et P. Tannery, 1982, *La Géométrie de Descartes, Discours de la méthode et essais*, VI, Vrin, Paris, pp. 445).

$$(4)\qquad a\sqrt{x^2}=\sqrt{a^2x^2}\ ,\ \sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}\ ,\ \frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{p^2a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{p^2a}{b}}\ ,\ \ldots$$

ont été énoncées par al-Khwārizmī, dans le cas où $a, b, p \in \mathbb{Q}^+$, et x est la racine d'un māl "*connue ou sourde*"[14].

Al-Khwārizmī s'est limité aux équations de degrés ≤ 2 et aux termes primitifs correspondant, "*en raison de l'exigence de la résolution par radicaux et à cause de son savoir faire dans ce domaine"* (Rashed, 1997, vol. 2, p. 32), c'est semble-t-il, la raison pour laquelle il n'a pas introduit des règles de multiplications pouvant faire intervenir des produits tels que $x.x^2$ ou $x^2.x^2$.

f) Il donne une justification géométrique de la règle (2) (en représentant a, b, c, d, x, par des segments de droite) puis, il déclare qu'il ne peut pas faire de même pour la règle (3), tout en exprimant qu'elle est évidente: "*quant à sa nécessité, elle est évidente par l'expression*" (p. 140).

g) Il introduit les deux mots "*al-jabr*" (algèbre) et "*al-muqābala*" (comparaison) désignant deux opérations algébriques[15].

Ce qui précède montre qu'al-Khwārizmī, après avoir introduit, d'une façon abstraite, les termes primitifs de l'algèbre, a lancé les fondements des deux chapitres qui constituent jusqu'à nos jours la base et l'objet de cette science:

1) la résolution par radicaux des équations polynomiales;
2) le calcul polynomial.

On s'aperçoit donc, dans le livre d'al-Khwārizmī, de la formation, ou plutôt de la naissance ou – comme l'indique le titre du livre de R. Rashed - du "*commencement* " de l'algèbre.

En parlant de "*commencement*" on ne veut évidemment pas dire que l'histoire n'a pas connu avant al-Khwārizmī des pratiques ou des procédés que nous pouvons qualifier actuellement[16] d'algébriques (du fait qu'ils traitent des inconnues et des équations). D'innombrables problèmes sur les nombres, les longueurs, les surfaces ou sur d'autres grandeurs, conduisaient, en effet, à de telles pratiques. D'importantes empreintes de pratiques algébriques (et, même de problèmes revenant à des équations du 2e degré avec leurs solutions)

---

[14] C'est la première fois que le mot *sourd* (*i.e.* irrationnel) -grec à l'origine- est utilisé dans le livre d'al-Khwārizmī. Le qualificatif "sourd" revient sûrement au mot "racine" et non au mot "māl" (tous les deux masculins en arabe), comme l'on lit dans l'édition de R. Rashed (p. 131), probablement à cause d'une erreur de frappe, *cf.* (al-Khāwrizmī, 1342, f. 6v). L'utilisation du mot sourd est d'ailleurs peu fréquente après cette occurrence: on la rencontre encore une seule fois (p. 133). C'est une des premières fois où ce mot a été utilisé dans la littérature mathématique arabe.

[15] Le mot "*al-jabr*" est utilisé par al-Khwārizmī dans le sens figuré de "reboutement" (recollement d'un objet cassé): opération qui consiste à faire disparaître un terme négatif qui figure dans l'un des membres d'une équation, en ajoutant la valeur absolue de ce terme aux deux membres. *Al-muqābala* consiste à éliminer les termes communs aux deux membres, de sorte à ramener l'équation à l'un des 6 types. La littérature algébrique arabe est presque unanime sur la signification de ces deux termes dont l'utilisation commence dans le livre d'al-Khwārizmī vers la fin de la partie théorique ("*le chapitre sur les six problèmes*").

[16] C'est-à-dire après la constitution de l'algèbre grâce au livre d'al-Khwārizmī et aux travaux de ses successeurs.

se trouvent sur des tablettes babyloniennes[17]. Au 4e s. av. J-C, Euclide présente dans le livre II des *Éléments*, des propositions sur les longueurs et les surfaces rectangulaires, dont l'interprétation algébrique est facile et conduit à des identités algébriques importantes ainsi qu'à une résolution des équations trinômes du 2e degré. Plus tard, près de six siècles avant al-Khwārizmī, Diophante a manipulé des puissances de l'inconnue (numérique) allant jusqu'à la neuvième (Rashed & Houzel, 2013, pp. 25-26 et 31) et a utilisé des techniques algébriques développées au cours de ses résolutions de problèmes numériques dans sa grande œuvre, *Les Arithmétiques*. Il a résolu des problèmes pouvant être ramenés à des équations du 2e degré en utilisant des techniques qui s'apparentent aux méthodes babyloniennes[18]. Au 6e siècle de notre ère, on trouve dans la tradition indienne –Brahmagupta (598-668) et Aryabhata (476-550)- des règles de calcul sur les racines carrées ainsi que des équations du 2e degré résolues en utilisant des algorithmes qui ressemblent à ceux d'al-Khwārizmī[19].

On comprend donc bien que, par l'expression "*commencement de l'algèbre*", on veut en fait dire que les inconnues, les équations et les polynômes n'ont jamais été traités avant ce livre du 9e siècle, comme des objets mathématiques; on se contentait plutôt de les manipuler d'une façon aléatoire, au cours de la résolution de tel ou tel problème géométrique, arithmétique ou autre. Leur naissance comme des êtres mathématiques à part entière, accompagnée de celle des lois qui régissent leur traitement, est l'acte qualitatif nouveau qui a déterminé la naissance de l'algèbre.

LES TERMES PRIMITIFS

Les termes primitifs, tels qu'ils étaient introduits par al-Khwārizmī, suffisaient, en forme et en contenu, pour exprimer son algèbre. La "*chose*" (qui est, selon lui, « *la racine* ») est l'inconnue de l'équation; mais, c'est aussi l'indéterminée du polynôme. La confusion entre la notion d'inconnue et celle d'indéterminée (allant jusqu'à les désigner par le même symbole alphabétique, plus tard, à partir du 16e siècle) a persisté jusqu'à la fin du 19e siècle. Le mot « *racine* », s'il n'est pas attribué à une grandeur déterminée, (comme il a été introduit par al-Khwārizmī) comporte une bonne part d'abstraction et revêt une signification nouvelle, bien qu'il ait été utilisé antérieurement, dans le domaine des nombres (rationnels positifs), dans un sens précis[20]. Le mot «*chose*» est considéré par les linguistes de l'époque, comme étant « *le plus indéfini des indéfinis* »[21]. De là, il est le mot qui convient, le plus, pour désigner l'indéterminée dans un polynôme. Et, de fait, on rencontre ce mot, pour la première fois, dans le livre d'al-Khwārizmī, au début du second chapitre, celui qui traite les calculs sur les polynômes (le mot « *jadhr* » ayant été déjà introduit avec les autres termes primitifs dans le

[17] Voir Dahan-Dalmédico et Peiffer (1986, pp. 72-74) et Rashed et Houzel (2013, pp. 9-13)..

[18] Op. cit. pp. 77-80. Voir aussi Ver Eecke (1959, prop. 27, 28, 30, pp. 36-40) et Rashed et Houzel (2013, pp. 170-171).

[19] Pour plus de détails, voir (pp. 65-79).

[20] Pour Diophante, la « *racine* » d'un nombre carré (resp. cubique, …, 6e), est son « *origine* » c. à. d. le nombre dont le carré (resp. le cube, …) est *n*. Et, comme Diophante utilise ce mot sans qu'il figure dans l'ensemble de ses « *Définitions* », il paraît qu'il a été en usage bien avant lui. Le mot "*racine*" est pris dans le sens littéraire d'"*origine*", ainsi que dans le sens arithmétique (racine carrée d'un nombre), dans l'un des premiers dictionnaires arabes, composé par le linguiste al-Khalīl ibn Ahmad al-Farāhīdī (…-175, H, #791): *kitāb al-'ayn*, ed. Mahdi al-Makhzūmī et Ibrāhīm al-Sāmarrā'ī, Beyouth, 1988, vol. 6. p. 93.

[21] *Cf.* (Rashed 2007, p. 15). Par ailleurs, pour l'un des premiers linguistes arabes, Sybawayh (…-180, H, #796), ce mot prend un sens proche de "*l'inconnue*": "*La chose se dit de tout ce dont on parle, avant qu'on le connaisse, qu'il soit masculin ou féminin*": *Le livre de Sybawayh*, ed. A. S. Haroun, Dār al jīl, Beyrouth, S. D., vol. 1, p. 22.

chapitre premier). Puis, ce mot « *chose* » est utilisé dans les chapitres qui suivent (consacrés à l'application de la théorie aux problèmes pratiques), pour désigner l'inconnue[22]. Ainsi, on ne peut pas écarter la possibilité que le retard dans l'introduction de ce mot soit voulu par al-Khwārizmī.

Al-Khwārizmī définit le mot *māl*, à partir de la *racine*, au moyen de la multiplication (opération dont il admet l'existence en algèbre et qu'il justifie plus tard). Les autres mots : « *le nombre simple* » dans le sens de nombre tout court, ou (qui se trouve dans l'équation) tout seul, est "*tout nombre prononcé sans qu'il soit rapporté ni à une racine ni à un māl*"; le mot *prononcé* ou *prononçable* ("*malfūzon bihi*") est très probablement utilisé dans le sens de "rationnel" car il sera utilisé dans ce sens par les mathématiciens arabes qui ont étudié et développé la théorie des irrationnels du livre X d'Euclide. Le verbe « *égaler* » ("*'adala*") est emprunté à la langue usuelle ou au vocabulaire mathématique antérieur; il est utilisé dans son sens intuitif exprimé dans le premier livre des *Éléments* d'Euclide; aucun équivalent du mot « *équation* » ne figure dans le langage d'al-Khwārizmī[23]; mais, la classification des équations en types canoniques et le fait de rendre chacune d'elle à l'un de ces types, revient, en fait, à considérer les équations comme des êtres mathématiques qui existent. Concernant ce point, notons un fait important remarqué par R. Rashed, à savoir qu'al-Khwārizmī a inversé la démarche de ses prédécesseurs pour arriver aux équations: "*Ce n'est pas lors de résolution des problèmes qu'al-Khwārizmī trouve ces équations: la classification des équations précède en effet tout problème. Celle-ci est résolument introduite comme première étape obligée de la construction d'une théorie des équations* ..." (p. 24) ; de plus, il n'est pas arrivé aux "six types" d'équation en donnant des modèles généralisant ou abstrayant des multitudes de problèmes pratiques, mais en pratiquant des "procédés combinatoires" sur les termes primitifs (Les mots : *racines*, *māls*, *nombres simples* et le verbe *égaler*).

LES QUASI-AXIOMES ET LEURS JUSTIFICATIONS

Les solutions algébriques nécessitent, en plus des termes primitifs, des calculs algébriques. Ces derniers ont besoin d'axiomes algébriques auxquels ils se réfèrent. De tels axiomes ne sont pas énoncés en tant que tels dans le texte d'al-Khwārizmī, mais y sont donnés de façon plus ou moins implicite. Ce manque ne doit pas nous surprendre, vu que l'histoire n'a pas connu, avant la fin du 19e siècle, des théories mathématiques qui sont nées en étant dotées de leur système de termes primitifs et d'axiomes. Les activités relatives aux disciplines mathématiques avaient précédé, et de loin, leurs fondements axiomatiques. Tel était le cas des deux plus anciennes disciplines, l'arithmétique et la géométrie, qui ont connu une première forme de fondement axiomatique dans les *Éléments* (livres VII et I), raffiné et consolidé longtemps plus tard, avec Hilbert (1862-1943) pour la deuxième discipline et avec Péano (1858-1932) en ce qui concerne la première. Cela dit, il reste pourtant à savoir pourquoi le mot *axiome* est absent du langage d'al-Khwārizmī qui connait certainement les *Éléments* d'Euclide[24]. La réponse à cette question pourrait bien exister indirectement dans l'introduction du livre d'al-Khwārizmī. On y lit, en effet, que l'auteur ne le destinait pas aux

---

[22] Le mot "*inconnu(e)*" ne figure pas en tant que terme primitif dans le livre d'al-Khwārizmī. Il n'y a été utilisé que rarement, et dans un contexte littéraire; voir par exemple (p. 109). Voir la note précédente.

[23] Le mot "*mu'ādala*" qui, de nos jours, signifie l'objet mathématique "équation", a, de plus, une autre signification en arabe: l'égalisation ou le fait d'égaler. C'est souvent dans ce deuxième sens qu'on le trouve utilisé par les successeurs d'al-Khwārizmī.

[24] *Cf.* (Rashed, 2007, p. 36 et 2012, p.37).

chercheurs mais qu'il le voulait « *un livre concis* » qui *« enferme ce qui est subtil dans le calcul … , ce dont les gens ont nécessairement besoin dans leur héritages leurs legs, leurs partages, leurs arbitrages, leurs commerces et dans tout ce qu'ils traitent les uns avec les autres lorsqu'il s'agit de l'arpentage des terres, de la percée des canaux, de la mensuration et d'autres choses relevant du calcul* »[25].

Al-Khwārizmī n'utilise pas d'expression spéciale pour désigner le *polynôme*[26]. Il donne pourtant les règles (1) et (2), de multiplication et d'addition pour les binômes, et la règle d'addition (et de soustraction) pour les trinômes, (3), en transportant en algèbre certains termes et propriétés de la mathématique antérieure:

1) Il introduit la multiplication algébrique des binômes en s'aidant d'un modèle arithmétique: après avoir défini la multiplication des nombres (entiers naturels) comme dans le livre VII des *Éléments*, il fait l'analogie entre le binôme $(bx \pm a)$ et le nombre entier dont b est le chiffre des dizaines et a est celui des unités[27] et, il s'appuie sur sa définition multiplicative du *māl* pour justifier la règle (1); il admet implicitement que la multiplication d'un nombre par un nombre donne un nombre, par une *chose* donne des *choses* et par un *māl* donne des *māls*. De même, il admet la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication, la distributivité de la seconde par rapport à la première et l'associativité mixte dans l'algèbre des polynômes à coefficients rationnels. Les successeurs d'al-Khwārizmī, n'ont pas tardé à sentir le besoin d'exprimer explicitement ces propriétés[28].

2) Il donne les règles (2) et (3) et promet de «*montrer la cause de cela par une figure* (<géométrique>) *qui te mène à ce qu'on recherche* » (p. 131) puis, il présente les formules (4) en les approchant par des exemples numériques. Il passe, ensuite à sa promesse et justifie (2) géométriquement, en représentant a, b, x, …, par des segments de droite et en les approchant par des valeurs numériques[29]. Dans (3), il utilise les termes « *racine* » et « *māl* » dans le sens abstrait. Il ne donne pas de justification géométrique de cette règle de calcul, en expliquant que pour $(a + bx + cx^2)$, "*il ne lui convient pas de figure, car cela est composé de trois genres différents, des māls, des racines et du nombre et il n'y a pas avec eux*

[25] Traduction de (Rashed, 2007, p. 94); voir aussi (Rosen, 1831, p.2).

[26] se contentant, pour cela de mots circonstanciels de la langue ordinaire : "*Je t'enseigne comment multiplier les unes par les autres les choses qui sont les racines, si elles sont seules, si elles sont avec un nombre, si elles sont diminuées d'un nombre ou si elles sont retranchées d'un nombre, et comment les additionner les unes aux autres et comment les retrancher les unes des autres* » (p.122).

[27] Après une longue explication de la façon de multiplier les nombres s'ils sont "*des dizaines auxquelles on a ajouté des unités ou dont on a retranché des unités*", il dit "*je t'ai montré cela pour* ***t'indiquer*** ("لِتستدلّ به") *comment multiplier les choses les unes par les autres, si elles sont ajoutées à un nombre, ou retranchées d'un nombre ou diminuées d'un nombre*" (pp.122 et 124).

[28] On lit chez abū-Kāmil: "*Sache que les choses par les choses sont des māls et les choses par des nombres sont des choses* …" (Rashed, 2012, p. 283). Plus tard, al-Karajī dit: "*le nombre, multiplié par n'importe quelle chose, le produit est du genre (de la chose) qu'il multiplie* ..." (Chalhoub, 1986, p. 159). Notons enfin qu'abū-Kāmil présente une justification arithmétique de la propriété de l'associativité mixte: $m.(n.P) = (m.n).P$ où m et n sont des nombres et P est un monôme: "*Car tout nombre s'il est multiplié par un genre quelconque, alors chacun de ces genres est considéré comme Un : s'il est une chose, alors il se considère Un, s'il est deux choses, il est considéré deux; et, de même, si ce sont des māls ou autres; puis on multiplie par le nombre, alors le produit est de ce (même) genre*" (Rashed 2012, p. 283). Ensuite, il présente des justifications géométriques de cette propriété et de plusieurs autres, ainsi que certaines règles de calcul sur les nombres, les racines et les māls, développant ainsi le travail d'al-Khwārizmī dans ce domaine (Rashed 2012, p. 281-319).

[29] Au lieu d'utiliser x dans son sens abstrait ("*racine*"), il prend pour x un exemple: $x = \sqrt{200}$.

ce qui leur est égal pour que cela puisse être représenté par une figure"; il continue, concernant la règle de calcul (3): "*Nous pouvons en avoir une figure <mais> non sensible. Quand à sa nécessité, elle est évidente par l'expression*" (p. 140). En disant "*et il n'y a pas avec eux ce qui leur est égal pour que cela puisse être représenté par une figure*", il veut semble-t-il rappeler qu'il a déjà présenté une "*figure*" (et une justification) géométrique des algorithmes de résolution des équations, où les polynômes avaient « *avec eux ce qui leur est égal* ». Ces propos d'al-Khwārizmī sont importants. D'une part, ils reflètent une crise d'axiomes de cette discipline nouvelle; nous ne savons pas, en effet, pourquoi, lors de son traitement de l'addition et de la soustraction des trinômes $(a + bx + cx^2)$, il n'a pas passé outre cette problématique posée par la non homogénéité en procédant comme lors de sa justification géométrique des algorithmes, c'est-à-dire en prenant pour x^2 un carré de côté x, pour bx un rectangle de longueur b et de largeur x et, pour a une surface rectangulaire de valeur a. D'une autre part, ces propos pourraient refléter l'intention d'al-Khwārizmī de ne pas alourdir son livre par des propositions théoriques, vu qu'il est destiné à un public large. Il semble que cette même intention d'al-Khwārizmī l'a poussé à présenter les algorithmes de résolution des équations trinômes et les raisonnements géométriques qui les justifient, avant les quasi-axiomes concernant les opérations algébriques sur les polynômes (*i.e.* les règles de calcul (1) … (4) citées plus haut).

LES "DÉMONSTRATIONS" GÉOMÉTRIQUES

Le choix du mot "raisonnement" vers la fin du paragraphe précédent, au lieu du mot "démonstration", est délibéré. Nous estimons que ce mot, convient mieux que le mot « démonstration » pour désigner la justification géométrique des algorithmes de résolution des équations trinômes et de la règle d'addition des binômes, ainsi que pour la justification arithmétique de la règle de leur multiplication. Il nous semble, en effet, qu'al-Khwārizmī était conscient du fait que les démonstrations géométriques ou arithmétiques ne conviennent pas dans une discipline qui n'est ni l'arithmétique ni la géométrie, bien qu'elle soit née de leur mariage et de l'abstraction de certaines de leurs opérations. Cette présente opinion serait justifiée par le fait qu'au cours du traitement de ces problèmes, al-Khwārizmī utilise le verbe « *raisonner* » ou "*se guider*" ou l'expression "*indiquer la cause*"[30] ("يُستدلّ على العلّة"), au lieu du verbe "*démontrer*", bien que le mot "*démonstration*" ("برهان") n'est pas étranger à son vocabulaire[31]; elle pourrait de même se justifier par l'utilisation par Thābit ibn Qurra (…-901) de l'expression: "*la manière de résoudre* (ou d'extraire) *cela*" ("الوجه في استخراج ذلك"), au lieu de : "*la démonstration de cela*", lors de son traitement des algorithmes de résolution des équations trinômes[32]. De son côté, Abū Kāmil utilise les termes "*figure*" (géométrique),

[30] Parlant des équations trinômes, il dit: "*Quant aux trois sortes* (d'équations) *qui restent, dans lesquelles on a besoin de partager les racines* (le nombre des racines) *en deux moitiés, je les ai décrites au moyen de procédés vrais et j'ai façonné pour chacun de ces procédés une figure* ***qui indique*** (ou qui guide à) *la cause de cette partition en deux moitiés* » (p. 107). « *Quant à la cause de un māl plus dix racines égalent trente neuf dirhams, la figure relative à cela est …* » (p. 109); … « *Quant à la cause de racine de deux cents moins dix soustraite de vingt moins racine de deux cents, voici la figure: …* » (p. 139); pour l'expression "*indiquer*" ou « *guider à* » ; voir la note 27, plus haut.

[31] il l'a utilisé convenablement dans la partie géométrique de son livre (p. 209), (Rosen 1831, p. 53).

[32] *Cf.* (pp. 33, 37, 41), où R. Rashed reproduit le texte du traité d'Ibn Qurra : « *Rétablir les problèmes de l'algèbre par les démonstrations géométriques* », édité dans son livre: *Thabit ibn Qurra: Science and Philosophy in 9th-century Bagdad* (Berlin; New York Walter de Gruyter, 2009), pp. 826-901.

"*cause*" et « *démonstration* », chacun dans un contexte différent et de façon systématique, ce qui indique qu'il fait bien la différence entre ces termes. En effet, il a réservé le mot "*cause*" à la traduction géométrique des équations trinômes du 2^e^ degré et des algorithmes de leurs solutions, et il a réservé le mot "*démonstration*" à la preuve de toute proposition géométrique[33].

Les successeurs directs d'al-Khwārizmī ont développé le raisonnement géométrique en algèbre, à partir d'ibn Turk, Thābit ibn Qurra et Abū Kāmil. Thābit auquel, d'après R. Rashed, revient "*la première contribution à l'algèbre géométrique*", a consacré un traité dont le titre indique son intention de fonder le raisonnement géométrique en algèbre sur des bases théoriques solides[34]. Il y utilise explicitement les propositions II. 5 et II. 6 des *Éléments* ce qui a été fait aussi par Abū Kāmil qui "*a multiplié les procédés de la démonstration géométrique en introduisant en algèbre la théorie des proportions et la géométrie euclidienne*" (Rashed, 2012, p. 226).

Toutes les solutions dans le livre d'al-Khwārizmī sont algébriques, exceptées les démonstrations concernant les algorithmes des solutions des équations trinômes du 2^e^ degré et quelques théorèmes élémentaires concernant les mesures dans un triangle, un quadrilatère ou un cercle, dans la partie géométrique de son livre; et, même dans cette partie, il résout algébriquement certains problèmes. En fait, on peut dire qu'en général, dans les chapitres qui ont suivi la partie théorique de son livre, al-Khwārizmī, traduit chacun des problèmes pratiques en une équation algébrique, transforme celle-ci en une équation de l'un des six types canoniques moyennant le *jabr* et la *muqābala*, puis il lui applique l'algorithme propre à son type, énoncé dans la partie théorique du livre.

Ce qui a été nommé par al-Khwārizmī « *la cause* » de l'algorithme (de solution d'une équation trinôme) est la démonstration géométrique de la traduction –ou de l'interprétation- géométrique de cet algorithme (en considérant x comme un segment de droite, x^2 comme un carré de côté x, …). C'est ainsi, la démonstration géométrique d'un problème géométrique. Il en est de même pour ce qui concerne les *causes* des règles d'addition et de soustraction des binômes. Nous estimons qu'en parlant de « *la démonstration par la cause* » (p. 54), R. Rashed entend ce type de démonstration qui est bien géométrique et dont le but était de justifier les fondements de la nouvelle discipline.

À partir de la 2^e^ moitié du IX^e^ siècle, les successeurs d'al-Khwārizmī étaient en mesure de lire toutes les mathématiques grecques à la lumière de l'algèbre. C'est ce qu'ils ont

---

[33] En résolvant l'équation (type): $x^2 + 10x = 39$, il dit: "*Dans ce problème il y a deux procédés. L'un te mène à la racine du carré (māl) et l'autre te mène au carré. Nous allons les présenter tous les deux et nous allons montrer leur cause par des figures géométriques que les géomètres qui ont examiné le livre d'Euclide comprennent*". D'autre part, voici un modèle de rédaction qui se répète systématiquement, lors des calculs concernant le produit des binômes et de la multiplication et de la division des *racines*, où apparaît le mot démonstration (Rashed, 2012, pp. 285-309): en montrant que $2x \times 2x = 4x^2$, il dit: « *Je compose une figure par laquelle je te fais comprendre la figure du māl et de la chose, et nous composons la figure pour la multiplication de deux choses par deux choses. Posons la droite AC deux choses et la droite CE deux choses; on multiplie la droite AC par la droite CE, on a la surface AE. Je dis que la surface AE est quatre māls. La démonstration de cela est: ...* »; il est clair, d'après la structure de cette phrase et du contexte de la suite du texte, que le mot "*cela*" dans l'expression "*la démonstration de cela*", se rapporte à la proposition: *la surface AE est quatre māls.*

[34] Voir la note 32, plus haut.

fait dans le courant d'un mouvement de recherche mathématique très active[35], entrainant une traduction dans le sens inverse: de la géométrie vers l'algèbre. L'algèbre commence alors à intervenir de plus en plus en géométrie en offrant des solutions algébriques aux problèmes géométriques. Il est inutile de rappeler, ici, l'importance des lectures algébriques des *Éléments* d'Euclide et notamment celles du Livre X qui ont transformé la théorie des irrationnels et constitué un domaine important d'exercice de l'algèbre[36]. On doit, pourtant, souligner celles qui concernent *les Coniques* d'Apollonius (2^{e} s. av. J-C) -traduites en arabe depuis le IX^{e} siècle, parce qu'elles ont entraîné un autre type de raisonnement géométrique en algèbre : cette fois, les solutions d'une équation algébrique sont données géométriquement, sans passer par la traduction géométrique de l'équation (c.à.d. sans représenter x^2, x^3 respectivement par des carrés et des cubes) mais en utilisant les propriétés de certaines courbes géométriques. C'était l'aboutissement d'une longue activité de recherche au cours de laquelle on a traité certains problèmes "solides"[37] hérités de la tradition mathématique grecque. De tels problèmes ont conduit les mathématiciens arabes à utiliser et développer une technique déjà pratiquée par leurs prédécesseurs grecs: celle de l'intersection des coniques. Ils ont utilisé cette technique pour résoudre d'autres problèmes, posés par la recherche en mathématique[38], ou en d'autres domaines[39]. La plupart de ces problèmes mènent à des équations de degré ≥ 3. La traduction algébrique des propriétés caractérisant les coniques ont abouti à des relations équivalentes à leurs équations algébriques par rapport à des systèmes d'axes divers. Cela marque le *premier commencement de la géométrie algébrique*, un commencement qui s'est imposé en tant qu'acte fondateur avec les travaux d'al-Khayyām (1048-1131)[40]. Celui-ci fut le premier mathématicien qui a conçu et réalisé un projet de résolution de tous les types d'équations cubiques moyennant l'intersection de coniques[41]. Ses méthodes en géométrie algébrique ont été développées par son successeur, Sharaf al-Dīn al-Tūsī (mort vers 1200), qui a utilisé des techniques avancées en algèbre et en analyse mathématique, lors de son étude de l'existence des racines et du problème des maxima de certaines expressions algébriques[42]. Ici,

---

[35] Ce mouvement est étudié dans (Rashed, 1986); voir aussi (Rashed & Vahabzadeh, 1999).

[36] Les lectures algébriques des Livres II, V, et VI sont évoquées dans le paragraphe suivant. Sur les lectures algébriques du Livre X, voir (Ben Miled, 2005), (Rashed, 1997, ch. 2) et (Farès, 2009).

[37] On appelait "*solides*" les problèmes géométriques non résolubles au moyen de la règle et du compas, comme "la duplication du cube" (qui se ramène au problème "des deux *moyennes*"), "*la trisection de l'angle*" et la construction de l'heptagone et certains autres polygones réguliers, …

[38] Comme "*le problème d'Archimède*": "*déterminer la section d'une sphère par un plan de telle sorte que les volumes des deux parties de la sphère ainsi déterminées soient dans un rapport donné*", transformé par al-Māhānī (… -880) en une équation cubique de la forme $x^3 + r = px^2$ qui, depuis, porte le nom de ce mathématicien arabe (*cf.* Cajori, F., *History of mathematics*, Londres, 1896). D'après al-Khayyām, cette équation n'a été résolue qu'avec al-Khāzin (X^{e} s.), par intersection de coniques, voir (Rashed 1997, vol. 2, p. 35-36 et 1999, p.117).

[39] Comme "le problème d'Ibn al-Haytham" ("*Problème d'al-Hazen*"): "*Etant donnés un cercle C et deux point P_1 et P_2, dans le même plan; trouver un point A de C, de telle sorte que le rayon lumineux partant du point P_1 et passant par A se réfléchit pour passer par P_2*". Ce problème posé et résolu par Ibn al-Haytham au moyen de l'intersection d'une hyperbole et d'un cercle, se ramène à un problème de résolution d'une équation du 4^{e} degré.

[40] *Cf.* (Houzel, 2002, p. iii), où on peut lire aussi dans la préface rédigée par R. Rashed: "*Il fallait attendre cinq siècles pour assister à un second commencement de la géométrie algébrique: c'est Descartes qui, dans sa Géométrie retrouve le projet d'al-Khayyām, l'énonce et énonce un projet complémentaire*".

[41] *Cf.*(Rashed, 1999). Voir aussi (Farès, 2005).

[42] *Cf.* (Rashed, 1986) et (Farès, 1995).

notamment quand on a lié l'existence de racines à la rencontre des deux courbes utilisées pour la solution de l'équation, apparaissent nettement des *démonstrations géométriques* en algèbre.

LES "DÉMONSTRATIONS" ARITHMÉTIQUES: L'INDÉPENDANCE DE L'ALGÈBRE

Pour justifier les algorithmes de solution et les règles de calcul, il était naturel qu'al-Khwārizmī et ses successeurs directs eussent recours à la géométrie qui était une discipline dotée d'un fondement axiomatique solide (et à l'arithmétique aussi). Ils manquaient, en effet, de moyens de démonstration algébriques, vu l'absence d'axiomes, énoncés explicitement en tant que tels, dans le livre d'al-Khwārizmī. Certaines propriétés de l'une ou de l'autre de ces deux disciplines ont été importées en algèbre dans un processus de généralisation[43]. Une telle importation était encouragée par la similitude entre certaines propositions du livre VII des *Éléments*, portant sur les nombres, et des propositions correspondantes portant sur les grandeurs géométriques dans les livres II et VI de cette œuvre *d'Euclide*, traduite en arabe à l'époque d'al-Khwārizmī.

Or, les activités qui ont le plus contribué à faire acquérir à l'algèbre son indépendance, sont celles qui se sont déroulées dans "*le courant arithmétique*" du développement de l'algèbre[44]. Dans ce courant, les calculs algébriques se sont développés à travers l'importation des opérations arithmétiques du domaine des nombres à celui des "*choses*", ce qui, dans la pratique, a aidé progressivement à passer outre l'absence de système axiomatique en algèbre. Les quasi-axiomes (1), (2) et (3) (concernant la multiplication des binômes, leur addition et l'addition des trinômes) ont été continuellement repris, par les successeurs d'al-Khwārizmī, repensés, raffinés et étendus aux polynômes. On a considéré et manipulé des puissances de la "*chose*" au-delà de la deuxième et introduit l'opération de division sur des expressions algébriques en appliquant sur elles la théorie des proportions (des livres V et VI des *Éléments*). On a formulé explicitement plusieurs quasi-axiomes, restés implicites dans le travail d'al-Khwārizmī[45]. Le chapitre concernant les calculs algébriques n'a pas tardé à précéder celui concernant la théorie des équations dans les traités algébriques, dans un ordre contraire à celui suivi par al-Khwārizmī et abū Kāmil. Cela indique une tendance à utiliser les règles de calcul données dans ce chapitre, comme outils de démonstration (pour les algorithmes de solution des équations et le développement du calcul polynomial); il indique aussi l'importance de plus en plus croissante que les mathématiciens de ce courant donnaient aux fondements de l'algèbre.

Il est vrai qu'il reste beaucoup de travail à faire pour écrire d'une façon précise l'histoire de ce courant. Mais, les recherches commencées par F. Wœpcke, A.P. Youschkévitch, A. Anbouba et qui ont abouti aux importantes œuvres de R. Rashed, suffisent largement pour tracer un schéma assez clair de son développement. Trois noms peuvent être considérés comme les points de repère les plus importants de ce schéma. Ce sont ceux d'abū Kāmil, al-Karajī (…-1029) et as-Samaw'al (…-1175).

Abū Kāmil a ajouté d'autres règles de calcul à celles données par al-Khwārizmī. Il a "*appliqué la théorie des proportions aux différents chapitres du calcul algébrique. Avec lui, un nouveau style s'impose donc: on adjoint, lorsque c'est possible, aux calculs algébriques, une démonstration forgée à partir de la théorie des proportions et de la géométrie*

---

[43] Voir la note complémentaire 1.

[44] R. Rashed a consacré un livre à l'étude de ce courant: (Rashed, 1984).

[45] Voir la note 28, plus haut.

euclidienne. Ce style, forgé par lui dominera encore pendant des siècles …C'est abū Kāmil qui le premier intégra les irrationnels quadratiques à l'algèbre, à la fois comme inconnues et comme coefficients … et, le premier à introduire l'analyse indéterminée des deux premiers degrés au titre de chapitre à part entière de tout traité en algèbre" (Rashed, 2012; Anbouba, 1978). Il a utilisé la technique de changement de variable pour transformer une équation en une autre et, avec lui apparaît une pratique importante dans la marche de l'algèbre vers son indépendance de la géométrie, à savoir le non respect de l'homogénéité. Il lui arrive en effet d'égaler une surface à un segment ("*le rectangle AE est la racine de AC*") lors de la justification géométrique de sa résolution de l'équation $ax^2 = bx$; de même, il représente une surface par un segment et une autre, dans la même figure géométrique, par un rectangle, quand il détermine x^2 sans passer par *x*, lors de la résolution des différents types d'équations trinômes du 2^e degré. Cette même représentation a été pratiquée plus tard, dans les mêmes circonstances par son successeur du 11^e siècle, al-Karajī (Wœpcke, 1853, pp. 68-71; al-Karajī, II, ch. "*sur les six problèmes*").

"*C'est al-Karajī qui a mené le plus loin les recherches d'abū Kāmil en algèbre et en analyse diophantienne …*" et, "*c'est grâce à l'algèbre d'abū Kāmil et aux Arithmétiques de Diophante qu'al-Karajī a conçu un nouveau programme qui marquera le destin de l'algèbre: l'arithmétisation de l'algèbre*" (Rashed, 2012, p. 11). L'expression "*arithmétiser l'algèbre*" se trouve clairement expliquée dans les propos suivants du successeur d'al-Karajī, qui a poursuivi son projet, as-Samaw'al, pour lequel, travailler en algèbre consiste à: "*opérer sur les inconnus au moyen de tous les instruments arithmétiques, comme l'arithméticien opère sur les connus*" (Ahmad & Rashed, 1972, p. 10). Alors qu'al-Khwārizmī s'était arrêté à la 2^e puissance de la "*chose*", les Banū-Mūsā (9^e s.) à la 3^e et abū Kāmil à la 8^e, al-Karajī a défini ces puissances et "*leurs parties*" (*i.e.* les puissances de $\frac{1}{x}$) jusqu'à la 9^e et a remarqué que ces *rangs* se succèdent ainsi jusqu'à l'infini (Wœpke, 1853, p. 48; al-Karajī, II, pp. 3-4). Il a défini la multiplication et la division de ces puissances et leurs rapports en faisant la liaison entre ces notions. Il a défini aussi la multiplication, l'addition (et la soustraction) des polynômes et établi plusieurs identités et formules algébriques dont notamment la formule du binôme, présentant le *triangle arithmétique* attribué à Pascal (1623-1662) et l'algorithme de sa construction (Ahmad & Rashed, 1972, p. 110-111). R. Rashed souligne le fait qu'al-Karajī a médité sur la nature de l'algèbre et sur les relations qui lient cette nouvelle discipline à la géométrie pour conclure que leur différence concerne les fondements mêmes des deux disciplines: "*la différence entre elles est que l'origine de l'une* (la géométrie) est *la ligne* (droite) *tandis que celle de l'autre* (l'algèbre) *est la chose; celle là* (la ligne) *se conçoit par la vue et celle-ci* (la "chose") *par une image connu par l'intelligence et conçu par l'esprit*[46]" (Anbouba, 1964, p. 47). Ce qui précède montre qu'avec al-Karajī, l'algèbre a atteint sa période de maturité en tant que science à part entière.

Le troisième mathématicien dont les travaux constituent une étape importante dans le processus de la fondation de l'algèbre et de son développement dans son courant "arithmétique", est as-Samaw'al, qui exprime clairement que son projet consiste à expliquer et à développer les travaux de son prédécesseur, al-Karajī, en algèbre. S. Ahmad et R. Rashed consacrent un livre important (1972) à l'édition et au commentaire de son ouvrage algébrique, dans lequel ils soulignent l'importance de ses apports et ajouts originaux. Nous croyons que

---

[46] Dans la 2^e partie de ce passage, al-Karajī exprime l'état d'absence du symbolisme algébrique à son époque, ce qui mène à effectuer les calculs algébriques mentalement (« *par l'esprit* »).

les plus remarquables de ces apports concernent les calculs sur les puissances de "*la chose*" et les polynômes. Il a en effet, manipulé les puissances négatives de l'inconnue, établissant des règles de calculs qu'on a durant longtemps attribués aux mathématiques du 16e siècle (Ahmad & Rashed, 1972, p. 12). A notre connaissance, il est le premier mathématicien de l'histoire à avoir représenté le polynôme par la suite numérique de ses coefficients. Cette représentation l'a aidé à donner des algorithmes pour l'addition, la soustraction et la multiplication de deux polynômes, ainsi qu'à transporter l'algorithme de la division euclidienne, du domaine des nombres à celui des polynômes. Cette représentation formelle des polynômes est un pas important en avant par rapport à l'algèbre d'al-Karajī; avec elle, les calculs algébriques ne reposent plus, comme avec ce dernier, sur le seul calcul mental. Elle constitue un acte remarquable dans le cadre du symbolisme en algèbre[47].

LA SOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Avec al-Khwārizmī et abū Kāmil, les calculs algébriques ont commencé comme une sorte de transfert de certaines propriétés du domaine des nombres à celui des êtres algébriques et comme une sorte d'extension de certaines propositions des livres II et VI des *Éléments* à ces êtres. Ils finissent avec al-Karajī et as-Samaw'al par devenir des règles de calcul propres à l'algèbre et, par constituer, par la suite, les données sur lesquelles se basent des démonstrations propres à cette science, consolidant ainsi son indépendance.

R. Rashed signale un indice de la marche progressive vers son indépendance de la géométrie, à savoir l'absence de plus en plus fréquente des figures géométriques dans les traités algébriques. Comme exemple, il cite un traité qui se trouve dans le manuscrit d'Oxford contenant le texte d'al-Khwārizmī, dont l'auteur est inconnu (p. 53). La lecture de ce traité nous a permis de trouver, en plus de plusieurs règles de calcul algébriques fondamentales, la solution purement algébrique des équations trinômes du 2e degré, telle qu'on la fait de nos jours, suffisamment analysée et commentée[48]. La même solution, expliquée mais avec moins de clarté, se trouve dans un petit traité d'al-Karajī (Al-Karajī, I), consacré à "*élaborer des démonstrations du côté de l'arithmétique, par l'algèbre, la muqābala et le nombre*" pour des propositions qu'il avait démontrées géométriquement ailleurs, concernant les solutions des équations du 2e degré[49]. Adel Anbouba (1964, p. 30) avait déjà souligné l'existence de ce traité et le fait qu'il contient une telle solution algébrique, mais sans l'avoir exposée. Cette solution est une forme bien plus développée de celle (algébrique aussi) qu'al-Karajī présente lui-même dans son livre al-Fakhrī, et appelle la solution selon "*la méthode* مذهب" (ou aussi la "*voie* طريق") de Diophante. Concernant l'attribution de cette méthode à Diophante, R. Rashed remarque que celui-ci n'a pas étudié les équations du second degré mais, qu'il a ramené les équations 27, 28, 30, du livre I de son *Arithmétiques* à des équations de la forme $x^2 = c$.[50]

---

[47] Pratiquement, il représente le polynôme $a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ par la suite ($a_0, a_1, ..., a_n$), où les a_i sont réparties sur les cellules d'un tableau linéaire, ce qui est, en fait, la représentation qu'on utilise de nos jours. Le calcul polynomial n'est plus alors mental comme chez al- Karajī ; en effet, de cette façon, il se conçoit par la vue, non seulement «*par l'esprit*» ; voir la note précédente.

[48] *Cf.* (auteur inconnu. S. D).

[49] Il est probable que le traité d'auteur inconnu que nous venons de mentionner soit rédigé après al-Karajī. Son style concis, contrairement à celui du traité d'al-Karajī, montre que son auteur avait déjà connu la méthode de ce dernier. Voir la note complémentaire 2, a) et b).

[50] Ces propositions s'écrivent, dans un langage moderne:

Ceci dit, il semble bien que la "*voie de Diophante*" consiste, pour al-Karajī, à ramener les équations du second degré à cette forme. Mais, en fait, sa méthode qui est celle de "la complétion du carré" est radicalement distincte de celle de Diophante[51].

La méthode exposée dans al-Fakhrī, se trouve dans un autre livre d'al-Karajī, al-Kāfī (Chalhoub, 1986, pp. 172-176), mais plus commentée, et précédée de l'énoncé de deux lemmes qui ne sont que les versions algébriques des propositions 5 et 6 du livre II des *Éléments*[52].

On note que les successeurs directs d'al-Khwārizmī, ont traité algébriquement des équations de degrés supérieurs à 2 mais, qui revenaient à des équations quadratiques (Rashed, 1984, p. 28). Plus tard, Omar al-Khayyām évoque des tentatives de résolution algébrique d'équations cubiques, sans succès, exprimant que "*peut-être d'autres qui nous succèderont, sauront-ils le faire*" (Rashed et Vahabzadeh, 1999, p. 124), souhait qui n'a été réalisé que presque quatre siècles plus tard, par les mathématiciens italiens. Al-Khayyām a essayé de compenser ce manque en pratiquant un calcul numérique approché de certains types d'équations cubiques. Une telle démarche a été appliquée systématiquement à tous les types de ces équations, par son successeur Saraf al-Dīn al-Tūsī (Rashed, 1986; Houzel, 1989; 1995).

CONCLUSION

La fondation d'une théorie mathématique consiste à donner ses termes primitifs et les axiomes qui définissent les opérations applicables à ces termes primitifs avec les lois à respecter en leur appliquant ces opérations. Une telle fondation est souvent une sorte de généralisation des pratiques déjà en usage (quand il s'agit d'opérations), et des objets qui subissent ces pratiques (quand il s'agit de termes primitifs). La généralisation est alors une abstraction des objets et des concepts anciens; c'est un passage à un niveau conceptuel plus élevé, dans lequel les anciens objets et concepts, ne sont que des exemples ou des cas particuliers de leurs modèles abstraits introduits dans la nouvelle théorie. C'est ce qu'al-Khwārizmī a fait ou, plus précisément, a abordé (ou commencé) dans son livre algébrique.

Le mot "*chose*" qui, grâce à al-Khwārizmī, est passé du langage ordinaire au lexique mathématique, a marqué, par sa généralité, la naissance de l'algèbre et sa transcendance au

---

Prop. 27: $x+y = a, x.y = b$; prop. 28: $x+y = a, x^2 + y^2 = b$; prop. 30: $x-y = a, x.y = b$; la solution de la prop., 27, donnée par Diophante pour, $a = 20, b = 96$, revient à la suivante : on pose $x-y = 2t$, alors $x = 10 + t\ (= \frac{a}{2} + t)$, $y = 10 - t\ (= \frac{a}{2} - t)$, d'où: $100 - t^2 = 96$; $(\frac{a^2}{4} - t^2 = b)$; ainsi, $t^2 = 4$, $t=2$, $x=12$ et $y=8$ (Ver Eecke, 1959, pp. 36-38).

[51] Pour l'équation $x^2 + 10x = 39$, comme modèle, il dit: "*et, si t u veux que la racine du māl sorte suivant la doctrine de Diophante, tu cherches un nombre qui, si tu l'ajoutes à un māl et dix choses, il devient un carré et tu ne trouves autre que 25 qui, si tu l'ajoutes à un māl et dix choses, la racine de cela est une chose et cinq dirhams ...*" (*Cf.* al-Karajī, II, f. 42, Woepcke, 1853, p. 66). Sa méthode s'écrit, dans un langage moderne comme suit:

$$x^2 + 10x = 39 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 64 \Leftrightarrow (x+5) = 8 \Leftrightarrow x = 3.$$

Pour plus de détails, *cf.* Rashed (2007, p. 64 ; 2012, p. 58).

[52] Voir la note complémentaire 1.

dessus des deux disciplines mathématiques de l'époque: la géométrie et l'arithmétique, assez solidement fondées dans les *Éléments* d'Euclide et auxquelles elle doit sa naissance.

Al-Khwārizmī était explicite en soulignant le côté arithmétique de son projet: "*Quand j'ai examiné ce dont les gens ont besoin en calcul, j'ai trouvé que tout cela est nombre … et j'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'al-jabr et d'al-muqābala, selon trois modes qui sont: les racines, les carrés et le nombre simple …*" (p. 96). Il était, de même, explicite en remarquant que son projet s'étend aux calculs géométriques[53]. Ainsi, à partir d'al-Khwārizmī, on a appliqué les opérations de l'arithmétique aux êtres algébriques (les "*choses*", les *māls*, les polynômes, …) alors, il était naturel de les appliquer aux grandeurs géométriques (segments de droite et surfaces rectangulaires …) vu que celles-ci sont des "*choses*". Le livre algébrique d'al-Khwārizmī apparaît ainsi, selon l'expression de R. Rashed, non seulement comme un "*acte fondateur*" d'une discipline nouvelle, mais aussi, d'un style nouveau, révolutionnaire, non admis dans la tradition grecque et, qui a marqué la mathématique arabe, à savoir "*étendre l'application des disciplines mathématiques, les unes sur les autres, suscitant ainsi de nouveaux chapitres, …*" (p. vii).

On trouve dans le livre algébrique d'al-Khwārizmī, donnés de façon consciente, des termes primitifs d'une nouvelle théorie, ainsi que des règles de leur traitement qui jouent le rôle d'axiomes, même si elles n'ont pas été énoncées explicitement sous ce titre. Ces règles de calcul, ou quasi-axiomes, n'ont cessé de s'enrichir et de s'affiner depuis l'époque d'al-Khwārizmī. À partir du 11^{e} siècle, leur développement avec al-Karajī et son école, atteint un niveau permettant à l'algèbre d'occuper sa place en mathématique, comme une discipline indépendante.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

Note 1. Voici le texte de chacune des propositions II. 5 et II. 6 des *Éléments*[54], suivi d'une version arithmétique et d'une autre, algébrique, formulées par al-Karajī dans son livre al-Kāfī. Nous faisons suivre chacune de ces versions de son écriture en langage symbolique moderne. Cela pourrait aider à constituer une idée du transfert des propositions géométriques de la mathématique grecque, à la mathématique arabe, en utilisant le langage algébrique ou arithmétique.

Prop. II. 5: *Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de sections, est égal au carré sur la moitié de la droite*.

Une version arithmétique de la prop. II. 5, *al-Kāfī*, (Chalhoub, 1986, pp. 168-169):

"*Tout nombre, si tu le divises en deux parties différentes et tu multiplies l'une d'elles par l'autre et tu ajoutes au produit le carré de la différence entre la moitié du nombre et l'une des parties, la somme sera le carré de la moitié du nombre*":

$$n.(b-n)+\left(n-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Une version algébrique de la prop. II. 5, *al-Kāfī*, (Chalhoub, 1986, pp. 176):

---

[53] Voir la première citation contenue dans le paragraphe « les quasi-axiomes et leurs justifications ».

[54] Nous nous basons sur la traduction française du texte grec, faite par B. Vitrac, une des plus fidèles au texte d'Euclide (*cf.* Vitrac, 1990).

"*De tout māl* (carré)*, si tu en retranches un nombre de ses racines moins le carré de la moitié de leur nombre, ce que tu obtiens admet une racine qui est la racine de ce carré moins la moitié du nombre des racines*":

$$x^2 - \left(bx - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right) = \left(x - \frac{b}{2} \right)^2$$

Prop. II. 6: *Si une ligne droite est coupée en parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite ajoutée, est, pris avec le carré sur sa moitié, égal au carré sur la droite composée de sa moitié et de la droite ajoutée.*

Une version arithmétique de la prop. II. 6, al-Kāfī, (Chalhoub, 1986, p. 169):

"*Tout nombre, si tu lui ajoutes en sa longueur un ajout, alors le produit de l'ajout par le nombre avec l'ajout, avec le carré de la moitié du nombre, est égal au carré qui est de la somme de la moitié du nombre avec l'ajout*":

$$n.(b+n) + \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \left(n + \frac{b}{2} \right)^2$$

Une version algébrique de la prop. II. 6, *al-Kāfī*, (Chalhoub, 1986, p. 172):

"*A tout māl et des racines, si tu leur ajoutes la moitié du carré du nombre de ces racines, alors il sera un carré dont la racine est égale à celle du carré et la moitié du nombre des racines*":

$$\left(x^2 + bx \right) + \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x \right)^2$$

Note 2.

a) (Auteur inconnu): "*livre de la correspondance en algèbre et al-muqābala*". Bodl. Mo. Huntington (Al-Khwārizmī, 214), ff. 53^r-75^v, (*cf.* f. 65^r-65^v)

"*La voie pour extraire la racine dans ces trois problèmes combinés* (*i.e.* les trois équations trinômes)*, est que tu poses une grandeur carrée qui englobe ces trois types; et cela ne s'obtient qu'en multipliant les racines et les unités, ensemble* (il veut dire associés, par l'addition ou la soustraction)*, par elles-mêmes car, la multiplication d'une autre* (somme) *par elle-même ne donne pas les unités avec les racines, et, le produit d'un seul* (monôme) *par lui-même ne donne qu'un seul* (monôme)*, de même que le produit d'un* (monôme) *par l'autre. Alors il faut multiplier les racines et le nombre, ensemble, par elles-mêmes pour obtenir, du produit, un māl et des racines et des unités. Puis, ce nombre doit être la moitié du nombre des racines du problème, pour que le produit donne un māl égal à celui du problème et des racines égales à celles du problème, qui sont les deux inconnus. Le produit de la racine par la racine est un māl et, le produit de la racine et de la moitié du nombre des racines, chacun par l'autre (donne) les racines du problème et, le produit de la moitié du nombre des racines par elle-même est le carré de la moitié du nombre des racines. Tout ce qui se produit de la multiplication est un māl égal à celui du problème et des racines égales à celles du problème et le carré de la moitié du nombre des racines du problème; cela est dans le cas où ce qu'on multiplie par lui-même est la racine et la moitié du nombre des racines du problème. Mais, si l'un d'eux est retranché de l'autre, ce qui se produit de sa multiplication par lui-même est un māl et le carré de la moitié du nombre des racines, moins les racines du problème, selon les exigences des divers états du problème. Ce genre de multiplication couvre tous les inconnus du problème et, s'il y a différence en nombre, cette différence est une valeur connue qu'on n'a pas besoin de chercher. *Alors la racine inconnue est, soit la racine du premier carré moins* *la moitié du nombre des racines, soit la racine du deuxième carré et la moitié du nombre des racines, soit la moitié du nombre des racines et la racine de ce carré qui reste, ou la moitié du nombre des racines moins la racine de ce carré qui reste. C'est, la méthode pour trouver une grandeur carrée qui englobe ces trois types, dans sa généralité*"* … Puis, il explique en appliquant cette méthode à chaque type d'équation trinôme, donné abstraitement, *i.e.* où les coefficients ne sont pas donnés numériquement.

Commentaire. Il est clair que l'auteur essaye de ramener les équations trinômes des types IV, V, VI, susmentionnés:

$$\text{(IV) } x^2 + bx = c \quad , \quad \text{(V) } x^2 + c = bx \ , \ \text{(VI) } x^2 = bx + c$$

à la forme $Y^2 = D$, où D est un nombre rationnel connu. Il démontre que Y ne peut être que de la forme $Y = x \pm n$, où n est un nombre, et cela en éliminant les autres possibilités de Y (Y est un monôme, ou $Y = x^2 \pm n$, ou $Y = x^2 \pm nx$). Puis, il démontre que pour que Y^2 contienne effectivement la somme $x^2 \pm bx$, il faut prendre $n = \pm \frac{b}{2}$, alors on prend soit $Y = x + \frac{b}{2}$, soit $Y = x - \frac{b}{2}$, selon le type de l'équation à résoudre.

Le dernier passage, que nous avons délimité par deux astérisques, et dans lequel il déduit les solutions, peut s'écrire dans un langage moderne de la façon suivante: pour l'équation du type IV, on a $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ (ici, ce qu'il appelle ***premier carré*** est $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$); pour l'équation du type VI, $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$ (ici, ce qu'il appelle ***deuxième carré*** est aussi $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$); pour l'équation du type V, $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ (ici, ce qu'il appelle ***le carré qui reste*** est $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. Notons qu'il a traité les équations trinômes dans l'ordre suivant : IV, VI, V.

Nous reproduisons ici, en langage moderne, son travail concernant l'équation du type V, dont la solution est la plus longue et la plus expressive.

Il prend $Y = x - \frac{b}{2}$, alors $Y^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$; dans des lemmes précédant ce travail, il avait démontré (algébriquement) l'identité:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4} - bx \ ,$$

il en déduit

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4} - bx = x^2 + \frac{b^2}{4} - (x^2 + c) = \frac{b^2}{4} - c \ ,$$

d'où: $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-c$ ou $\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\frac{b^2}{4}-c$, d'où les deux solutions de l'équation.

b) (Al-Karajī, II): "*Causes du calcul de l'algèbre et d'almuqābala et sa démonstration. Extraits résumés d'un livre d'abū bakr al-Karajī*". Bodlean 1 Library 2.Ms Seld Super 22 (3). Extrait du "*chapitre sur les trois problèmes*":

"*Quand une racine est multipliée par une racine, le produit, comme on l'avait dit, est un māl. Et, quand une chose est multipliée par un nombre, le produit, est une racine et, quand un nombre est multiplié par un nombre, le produit est un nombre. De n'importe lequel de cela, ne sort des māls et des racines combinés, car ce genre de multiplication produit un seul genre parmi les māls, les racines et les nombres. Ceci étant, on a besoin d'associer la racine et le nombre, soit en ajoutant l'un à l'autre, soit en le retranchant de lui, puis de multiplier ce qui se produit après l'ajout ou la soustraction, par lui-même, pour obtenir une chose prononçable* (exprimable) *de māls, de racines et de nombres qui a une racine qui dépasse la racine qu'on demande ou qui est moindre, d'un nombre, de valeur connue; puis on s'applique à extraire la racine demandée de cette chose qui se produit après la multiplication. Ceci étant, il est correct qu'on prenne le nombre qu'on associe avec la racine, égal à la moitié du nombre des racines qui sont dans le problème, car si on fait cela, le produit sort, comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, un māl et un nombre, excédés ou diminués de racines égales en nombre aux racines qui sont dans le problème. ... ... il faut que l'association la plus correcte et la meilleure entre les racines et le nombre dans le premier des trois problèmes, soit l'addition, car les racines et le māl y sont additionnés, ... et l'association correcte entre les racines et le nombre dans les deux derniers problèmes, est la soustraction car les māls ne s'y additionnent pas avec les racines et car la multiplication fait sortir les racines diminuées des māls et du nombre ...*". Puis, al-Karajī applique cette méthode, à chacun des 3 types d'équations trinômes, dans un style assez long, en considérant, pour les coefficients, des exemples numériques.

REMERCIEMENTS

Cet article est une partie d'un projet de recherche soutenu et financé par le CNRS–Liban auquel l'auteur exprime sa reconnaissance. En le rédigeant, mes pensées étaient continuellement chez mes collègues de l'Institut du Patrimoine Scientifique de l'Université d'Alep; il est dédié à eux. J'exprime mes remerciements à M. le professeur Badaoui El-Mabsout de l'avoir lu en lui rapportant ses précieuses remarques.

RÉFÉRENCES

Ahmad, S. et Rashed, R. 1972. *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al. Édition, notes et introduction*. Univ. de Damas, Damas.

Anbouba, A. 1964. *L'algèbre - Al-Badī' d'al-Karajī. Édition, introduction, et notes*. Publ. de l'univ. libanaise, Beyrouth.

Anbouba, A. 1978. L'algèbre arabe aux IX^{e} et X^{e} siècles – Aperçu général. *Journal for the History of Arabic Science*, Alep, 1(2): 66 – 100.

Auteur inconnu (S. D). *Livre de la correspondance en algèbre et al-muqābala*. "كتاب المراسلة في الجبر والمقابلة". Bodl . Mo. Huntington (Al-Khwārizmī 214), f. 55-76.

Ben Miled, M. 2005. *Opérer sur le continu*. Académie tunisienne Beït al-Hikma, Carthage.

Chalhoub, S. 1986. *Al-Kāfī fi'l hisāb d'Abū Bakr Muhamed ben al-Hasan al-Karajī*. Université d'Alep.

Dahan Delmédico, A. et Peiffer, J. 1986. *Une histoire des mathématiques – routes et dédales.* Seuil, Paris.

Farès, N. 1995. Aspects analytiques dans la mathématique de Sharaf al-Dīn al-Tūsī. *Historia Scientorium, The History of Science Society of Japan*, 5-1: 39-55.

Farès, N. 2005. Note sur le choix des courbes fait par al-Khayyām dans sa résolution des équations cubiques et comparaison avec la méthode de Descartes. *Lebanese Science Journal*, 6(1): 95-117.

Farès, N. 2009. La notion d'irrationalité selon un mathématicien du X^{e} siècle: Abū Jaʿfar al-Khāzin. *Lebanese Science Journal* , 10(2): 113-123.

Houzel, C. 1989. Œuvres matématiques: algèbre et géométrie au XII^{ème} siècle; Sharaf al-Dīn al-Tūsī. Compte-rendu du livre du même titre, *Gazette des Mathématiciens,* (39): 59-63.

Houzel, C. 1995. Sharaf al-Dīn al-Tūsī et le polygone de Newton. *Arabic Sciences and Philosophy, Cambridge University Press,* 5.2: 239 - 262.

Houzel, C. 2002. *La géométrie algébrique–Recherches historiques*. Blanchard, Paris.

Al-Karajī, Abū Bakr, I. (S. D). *Causes du calcul de l'algèbre et d'almuqābala et sa démonstration. Extraits résumés d'un livre d'abū bakr al-Karajī.* Bodlean 1 Library 2, Ms Seld Super 22(3).

"علل حساب الجبر والمقابلة والبرهان عليه، مختصرات من كتاب لأبي بكر الكرجي".

Al-Karajī, Abū Bakr, II. (S. D). *Al-Fakhri*. Köprülü, Istanbul, 950, 1.

"الفخري من كلام زين الدين أبو بكر محمّد الحسن الحاسب الكرجي".

Al-Khwārizmī¸ M. 1342. "كتاب الجبر والمقابلة", *Kitāb al-jabr wa al-moqābala.* Bodl . Mo. Huntington (Al-Khwārizmī 214), ff. 1^{v}-34^{r}.

Musharrafah, A. 1937. : مشرّفة، علي مصطفى، ومرسي أحمد، محمّد: "كتاب الجبر والمقابلة، لمحمّد بن موسى الخوارزمي" تحقيق وتعليق. الجامعة المصريّة كليّة العلوم، القاهرة.

Rashed, R. 1984. *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, R. 1986. *Sharaf al-Dîn al-Tûsî: œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^{e} siècle*. T. 1 et 2, Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, R. 1997 (Sous la direction de, avec la collaboration de R. Morelon). *Histoire des sciences arabes.* Seuil, Paris.

Rashed, R. et Vahabzadeh, B. 1999. *Al-Khayyām mathématicien*. Blanchard, Paris.

Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.

Rashed, R. 2012. *Abu Kāmil: Algèbre et analyse diophantienne. Édition, traduction et commentaire.* De Gruyter, Walter, Inc.

Rashed, R. et Houzel, C. 2013. *Les arithmétiques de Diophante*. Walter De Gruyter GmbH, Berlin/Boston.

Rosen, F. 1986. *The algebra of Mohamed ben Musa*. Edited and translated by Frederick Rosen, Hildesheim: Olms Verlag, reprint of the first edition London: Oriental Translation Fund, 1831.

Ver Eecke, P. 1959. *Diophante d'Alexandrie: les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.

Vitrac, B. 1990. *Euclide d'Alexandrie : «les éléments»*. Vol. II, PUF, Paris.

Woepcke, F. 1853. *Extrait du Fakhri, par Abou Bekr Mohammed Ben al Haçan al Karkhi*. Bibliothèque Impériale, Paris.