

MESURE DE LA FONCTION DE RÉPONSE IMPULSIONNELLE DANS LES MODÈLES AUTORÉGRESSIFS

Mahmoud Mourad et Ali Harb¹

Université Libanaise, Département Économie et Gestion, Faculté de Sciences Économiques et
de Gestion (Branche 5), Beyrouth, Liban

¹ Université Libanaise, Faculté de Sciences (Branche 5), Liban
mmrad@ul.edu.lb

(Received 13 Septembre 2010 - Accepted 13 May 2011)

RÉSUMÉ

Dans ce papier, des calculs explicites furent réalisés pour la fonction de réponse impulsionnelle (FRI) et la réponse impulsionnelle accumulée (RIA) d'une variable aléatoire X_t générée par un processus autorégressif. En premier temps, on a considéré un modèle $AR(m)$ de la forme $(1 - \varphi B)^m X_t = \varepsilon_t$, où ε_t est un bruit blanc. La racine réelle $1/\varphi$ du polynôme autorégressif a un ordre de multiplicité m . En second temps, nous avons considéré un modèle $AR(m)$ ayant la forme $(1 - \varphi_1 B)(1 - \varphi_2 B) \dots (1 - \varphi_m B) X_t = \varepsilon_t$ où $1/\varphi_i, i=1, \dots, m$ sont des nombres réels distincts et chaque racine a un ordre de multiplicité qui est égal à un. Les résultats de cette recherche révèlent que la (RIA) dépend d'une part de la position de la racine autorégressive par rapport au cercle unitaire et d'autre part de l'ordre de multiplicité m de cette racine : pour m donné, la fonction $RIA(\varphi)$ augmente avec φ . Pour φ donné, le sens de variation de la fonction $RIA(m)$ dépend du signe de φ . Finalement on a simulé un processus $AR(2)$ et on a calculé les (FRI) et (RIA). La moyenne empirique des RIA s'est révélée presque égale à la valeur proposée par le calcul théorique.

Mots-clés: processus autorégressif, multiplicité, chocs, impulsion, simulation

ABSTRACT

In this paper, the explicit calculation required to obtain impulse response function (IRF) and the accumulated impulse response (AIR) of a variable X_t generated by an autoregressive process were carried out. First the $AR(m)$ model $(1 - \varphi B)^m X_t = \varepsilon_t$, where ε_t a white noise was considered. The real root $1/\varphi$ of the autoregressive polynomial has a multiplicity order m . Second, a general situation of an AR model $(1 - \varphi_1 B)(1 - \varphi_2 B) \dots (1 - \varphi_m B) X_t = \varepsilon_t$ was considered where $1/\varphi_i, i=1, \dots, m$ are distinct real numbers and each root has multiplicity order which is equal

to one. The results of this research reveal that the accumulated impulse response (AIR) depends on the position of the autoregressive root with respect to the unit circle and the multiplicity order m of this root: for given m , the $AIR(\varphi)$ increases with φ . For given φ , the sense of variation of the $AIR(m)$ depends of the sign of φ . Finally an $AR(2)$ process was simulated and the impulse response functions (IRF) and the accumulated impulse responses (AIR) were calculated. The empiric average of the (AIR) proved nearly to be equal to the value proposed by the theoretical calculation.

Keywords: autoregressive process, multiplicity, shocks, impulse, simulation

INTRODUCTION

Dans l'analyse économique empirique, connaître l'impact de la variation d'une variable sur les autres variables présente un intérêt important. Cette sorte d'analyse correspond à l'analyse de la réponse impulsionnelle qui est analogue à l'analyse des multiplicateurs dynamiques. Pour la détermination structurelle de multiplicateurs, on peut consulter l'ouvrage de Gourieroux et Monfort (1995). Beaucoup des publications traitent de la fonction de réponse impulsionnelle (FRI). On peut citer par exemple, Lütkepohl (1989,1990), Mittnik et Zdrozny (1993), Indjehagopian et Mourad (1993), Koop *et al.* (1996), Pesaran et Shin (1998), Phillips (1998), Jorda (2005). La réponse impulsionnelle peut être interprétée comme l'impact sur une variable si un choc se produit dans l'innovation. Beaucoup de recherche dans les domaines économiques et financiers traitent pratiquement de l'analyse de la réponse impulsionnelle. Cependant sur le plan théorique, on n'a pas trouvé une recherche qui traite de la réponse impulsionnelle accumulée (désormais RIA) dans le cas d'une variable générée par une structure particulière d'un processus autorégressif. En économétrie appliquée, le calcul de la (RIA) devient très familier. Par exemple, on mentionne les publications suivantes: Leigh et Rossi (2002) utilisent un modèle VAR récursif pour enquêter sur l'impact des mouvements du taux de change sur les prix en Turquie. Ils ont réalisé une analyse de la (FRI) et la décomposition de la variance des erreurs. Pao et Shinichi (2007) proposent une méthodologie alternative pour estimer la (FRI) sans imposer des restrictions paramétriques. Les réponses de l'impulsion sont estimées en régressant la série d'intérêt sur des innovations estimées qui sont les résidus obtenus lors d'une étape antérieure dite 'auto-régression longue'. Babecka (2009) explore les propriétés de la transmission d'un choc dans le taux de change en comparant des réponses impulsionnelles. Hall *et al.* (2009) proposent un nouveau critère d'information pour une fonction de réponse impulsionnelle en minimisant la distance entre les fonctions de réponse impulsionnelle théorique et empirique. Mitchell (2009) examine la (FRI) dans les modèles VAR quand une cointegration est présente. Hossain (2010) examine la (FRI) sur des séries temporelles concernant des variables macroéconomiques au Canada. Il estime deux versions de modèles VEC et il utilise les (FRI) pour mesurer les effets à long terme.

Dans le cas où le processus X_t admet une représentation $AR(1)$ stationnaire :

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où ε_t est un bruit blanc faible de variance σ^2 , et le coefficient φ est le coefficient autorégressif. La valeur actuelle de X_t est une somme de deux composantes. La première composante représente l'effet du passé et elle est déterminée par l'histoire du processus.

Cependant, l'histoire du processus est limitée seulement à la dernière réalisation, et l'impact de cette variable est atténué dans une certaine mesure par le coefficient autorégressif si $|\varphi| < 1$. La deuxième composante peut être regardée comme un choc aléatoire qui se produit au temps t . Ce choc est appelé l'innovation et il n'est pas observable. La solution générale de X_t a la forme:

$$X_t = \xi_t + u_t$$

où ξ_t est une solution de l'équation

$$\xi_t - \varphi \xi_{t-1} = 0 \tag{E_1}$$

et u_t est une solution particulière de l'équation

$$u_t = \varphi u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{E_2}$$

L'équation (E₁) donne $\xi_t = \varphi^t \xi_0$ et si $|\varphi| < 1$ alors $\xi_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. En respectant $|\varphi| < 1$, l'équation (E₂) donne:

$$u_t = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi^h \varepsilon_{t-h}$$

Il est clair que :

$$u_t = \varphi u_{t-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi^h \varepsilon_{t-h} - \sum_{h=0}^{\infty} \varphi^{h+1} \varepsilon_{t-h-1} = \varepsilon_t$$

La condition $|\varphi| < 1$ assure l'existence des moments marginaux des premier et second ordres de X_t (ici X_t est un processus centré). Leur invariance avec le temps garantit la stationnarité au sens large du processus. Pour un t assez grand, la valeur courante de X_t est exprimée en termes présent et passé des chocs. C'est la représentation de moyenne mobile infinie $MA(\infty)$ du processus $AR(1)$. Le coefficient φ^h peut être interprété comme suivant:

On considère un choc unitaire temporaire à l'innovation ε_t au temps t_0 (ce choc transforme ε_{t_0} en $\varepsilon_{t_0} + 1$). La valeur future du processus au temps $t_0 + h$ devient :

Avant le choc:
$$X_{t_0+h} = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi^h \varepsilon_{t_0+n-h}$$

Après le choc :

$$X_{t_0+h} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t_0+h-i} + \phi^h$$

et par conséquence l'impact du choc sur X_{t_0+h} est ϕ^h . On définit maintenant la suite

numérique de terme général $u_n = \sum_{h=0}^n \phi^h$. Cette suite est convergente et elle a la limite

$\frac{1}{1-\phi}$ qui est la (RIA) du processus X_t généré par un processus autorégressif du premier ordre. Donc la RIA est la somme cumulative de la fonction de réponse impulsionnelle. Nous signalons que pour un modèle $AR(m)$ stationnaire :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_m X_{t-m} + \varepsilon_t$$

la représentation $MA(\infty)$ a la forme (voir Judge *et al.*, 1988):

$$X_t = \sum_{h=0}^{\infty} \theta_h \varepsilon_{t-h} \text{ avec } \theta_0 = 1, \theta_h = \sum_{i=1}^{\min(h, m)} \phi_i \theta_{h-i}, \quad h \geq 1$$

Donc on peut calculer la RIA de X_t par:

$$RIA = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\min(h, m)} \phi_i \theta_{h-i} \right)$$

Dans la suite, le processus X_t est supposé stationnaire au sens large et ayant une représentation $MA(\infty)$. Ce papier est organisé comme suivant : dans les deux premiers théorèmes, on calcule explicitement les (FRI) et (RIA) associées au modèle $AR(m)$ dont le polynôme autorégressif a une seule racine d'un ordre de multiplicité égal à m . Dans le troisième théorème, on calcule les (FRI) et (RIA) associées au modèle $AR(m)$ dont le polynôme autorégressif a m racines réelles simples et distinctes. Finalement une simulation de la (RIA) sera calculée dans la cinquième section.

THÉORÈME 1

Considérons un processus X_t stationnaire au sens large et généré par un modèle $AR(m)$

$$(1-\varphi B)^m X_t = \varepsilon_t. \tag{2.1}$$

Le processus X_t a une représentation $MA(\infty)$ de la forme :

$$X_t = \sum_{h=0}^{\infty} \theta_h \varepsilon_{t-h}$$

Avec

$$\begin{aligned} \theta_h &= \frac{(h+1)(h+2)\dots(h+m-1)\varphi^h}{(m-1)!} = \frac{m(m+1)\dots(m+h-1)\varphi^h}{h!} \\ &= C_{m+h-1}^h \varphi^h = C_{m+h-1}^{m-1} \varphi^h \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve: La démonstration de ce théorème se fait par récurrence.

Pour $m=1$, la condition de la stationnarité exige que $|\varphi| < 1$. La représentation

$MA(\infty)$ de X_t est $X_t = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi^h \varepsilon_{t-h}$ et par suite les coefficients θ_h sont donnés par

$$\theta_h = C_h^h \varphi^h = C_h^0 \varphi^h = \varphi^h \text{ et la démonstration est faite pour } m=1.$$

Pour $m=2$, on a :

$$(1-\varphi B)^2 X_t = \varepsilon_t \tag{2.3}$$

La représentation $MA(\infty)$ de X_t est :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{i+j} \varepsilon_{t-(i+j)} = \sum_{h=0}^{\infty} \theta_h \varepsilon_{t-h} \tag{2.4}$$

Les premiers coefficients θ_h sont donnés par :

$$\theta_0 = 1, \theta_1 = 2\varphi, \theta_2 = 3\varphi^2.$$

On suppose que :

$$\theta_h = (h+1)\varphi^h \tag{2.5}$$

Il est clair que :

$$\theta_{h+1} = \sum_{k=0}^{h+1} \varphi^{k+1} = (h+2)\varphi^{h+1} \tag{2.6}$$

et par suite $\theta_h = C_{h+1}^h \varphi^h = C_{h+1}^1 \varphi^h$. On suppose maintenant que pour un modèle $AR(m)$, la représentation $MA(\infty)$ est :

$$X_t = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_m=0}^{\infty} \varphi^{i_1+\dots+i_m} \varepsilon_{t-(i_1+\dots+i_m)} = \sum_{h=0}^{\infty} \theta_h \varepsilon_{t-h} \quad (2.7)$$

avec $\theta_h = \frac{(h+1)(h+2)\dots(h+m-1)\varphi^h}{(m-1)!}$. (2.8)

On démontre que pour un modèle AR(m+1), la représentation MA(∞) est :

$$X_t = \sum_{h=0}^{\infty} \theta'_h \varepsilon_{t-h} \quad \text{avec } \theta'_h = \frac{(h+1)(h+2)\dots(h+m)\varphi^h}{m!}$$

Le processus X_t peut s'écrire sous la forme:

$$X_t = \frac{1}{1-\varphi B} \frac{\varepsilon_t}{(1-\varphi B)^m} = \frac{1}{1-\varphi B} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} \right) \quad (2.9)$$

où

$$\theta_j = \frac{(j+1)(j+2)\dots(j+m-1)\varphi^j}{(m-1)!} \quad (2.10)$$

et par suite $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^i \theta_j \varepsilon_{t-(i+j)} = \sum_{h=0}^{\infty} \theta'_h \varepsilon_{t-h}$ (2.11)

Les calculs de θ'_h se font par récurrence:

$$\theta'_0 = 1, \theta'_1 = (m+1)\varphi, \theta'_2 = \frac{(m+1)(m+2)\varphi^2}{2}$$

En supposant que :

$$\theta'_h = \frac{(m+1)\dots(m+h)\varphi^h}{h!} \quad (2.12)$$

et on prouve que :

$$\theta'_{h+1} = \frac{(m+1)\dots(m+h+1)\varphi^{h+1}}{(h+1)!} \quad (2.13)$$

l'expression de θ'_{h+1} apparaît comme suivant:

$$\begin{aligned}
 \theta'_{h+1} &= \varphi^{h+1} + \varphi^h \theta_1 + \varphi^{h-1} \theta_2 + \dots + \varphi \theta_h + \theta_{h+1} \\
 &= (m+1)\varphi^{h+1} + \frac{m(m+1)\varphi^{h+1}}{2!} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+h)\varphi^{h+1}}{(h+1)!} \\
 &= (m+1)\varphi^{h+1} \left[1 + \frac{m}{2!} + \frac{m(m+2)}{3!} + \dots + \frac{m(m+2)\dots(m+h)}{(h+1)!} \right] \\
 &= (m+1)(m+2)\varphi^{h+1} \left[\frac{1}{2!} + \frac{m}{3!} + \dots + \frac{m(m+3)\dots(m+h)}{(h+1)!} \right] \\
 &\quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\
 &= \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+h+1)\varphi^{h+1}}{(h+1)!} = C_{m+h+1}^m \varphi^{h+1} = C_{m+h+1}^{h+1} \varphi^{h+1}
 \end{aligned}$$

Donc le théorème est démontré pour tout ordre m .

Note: la série $\sum_{h=0}^{\infty} \theta_h$ est-elle convergente? En appliquant la règle de d'Alembert à cette

série, nous obtenons directement

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{\theta_{h+1}}{\theta_h} \right| \right) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h+m}{h+1} |\varphi| = |\varphi| < 1$$

Il en résulte que la RIA est convergente.

THÉORÈME 2

Considérons un processus stationnaire X_t généré par un modèle AR(m) de la forme $(1-\varphi\mathcal{B})^m X_t = \varepsilon_t$. Supposons que k_0 chocs unitaires ont eu lieu à l'innovation ε_t

aux temps t_1, t_2, \dots, t_{k_0} . La RIA de X_t est donnée par $\frac{k_0}{(1-\varphi)^m}$.

Preuve : on procède par récurrence.

$m = 1$: on considère deux chocs unitaires à l'innovation ε_t aux temps t_1, t_2 . On calcule la réponse impulsionnelle de X_{t_1+h} au temps $t_1 + h$. On obtient facilement :

$$\begin{cases} \varphi^h, & 0 \leq h \leq t_2 - t_1 - 1 \\ \varphi^h + 1, & h = t_2 - t_1 \\ \varphi^h + \varphi^k, & h = t_2 - t_1 + k, k \geq 1 \end{cases}$$

La RIA de X_t est :

$$RIA = \sum_{h=0}^{t_2-t_1-1} \varphi^h + \sum_{h=t_2-t_1}^{\infty} (\varphi^h + \varphi^{h-(t_2-t_1)}) = \frac{2}{1-\varphi} \quad (3.1)$$

On suppose maintenant que k_0 chocs unitaires à l'innovation ε_t se produisent aux temps t_1, t_2, \dots, t_{k_0} . Le calcul de RIA est obtenu directement par

$$RIA = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi^h + \sum_{h=t_2}^{\infty} \varphi^{h-t_2} + \dots + \sum_{h=t_{k_0}}^{\infty} \varphi^{h-t_{k_0}} = \frac{k_0}{1-\varphi} \quad (3.2)$$

$m = 2$: on utilise la représentation $MA^{(\infty)}$ de X_t (théorème 1) pour $m = 2$ ($\theta_h = (h+1)\varphi^h$). Pour deux chocs unitaires à l'innovation ε_t aux temps t_1, t_2 , la réponse impulsionnelle de X_{t_1+h} au temps $t_1 + h$ est donnée par :

$$\begin{cases} (h+1)\varphi^h, & 0 \leq h \leq t_2 - t_1 - 1 \\ (h+1)\varphi^h + 1, & h = t_2 - t_1 \\ (h+1)\varphi^h + (k+1)\varphi^k, & h = t_2 - t_1 + k, k \geq 1 \end{cases}$$

Et par suite la RIA devient:

$$\begin{aligned} RIA &= \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)\varphi^h + \sum_{h=t_2-t_1}^{\infty} (h-(t_2-t_1)+1)\varphi^{h-(t_2-t_1)} \\ RIA &= 2 \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\varphi^i = \frac{2}{(1-\varphi)^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

pour k_0 chocs unitaires à l'innovation ε_t se produisant aux temps t_1, t_2, \dots, t_{k_0} , on

obtient directement:
$$RIA = \frac{k_0}{(1-\varphi)^2}$$

Cas général pour m quelconque :

On va démontrer que pour un modèle $(1 - \varphi B)^m X_t = \varepsilon_t$ (la racine $1/\varphi$ du polynôme autorégressif a un ordre de multiplicité égal à m), si un choc unitaire à

l'innovation se produit au temps t_1 , la RIA aura l'expression suivante:
$$RIA = \frac{1}{(1-\varphi)^m}$$

D'après le théorème (1), la RIA est :

$$RIA = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_m=0}^{\infty} \varphi^{i_1+\dots+i_m} = \sum_{h=0}^{\infty} \theta_h \quad (3.4)$$

Et pour $m = 1, 2$, les RIA sont respectivement $\frac{1}{1-\varphi}$ et $\frac{1}{(1-\varphi)^2}$.

On raisonne par induction sur m . On suppose que pour un modèle AR(m), la RIA est:

$$RIA = \frac{1}{(1-\varphi)^m} \quad (3.5)$$

On démontre que pour un modèle AR($m+1$),

$$RIA = \frac{1}{(1-\varphi)^{m+1}}. \quad (3.6)$$

Pour un modèle AR($m+1$), la RIA est donnée par:

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_m=0}^{\infty} \sum_{i_{m+1}=0}^{\infty} \varphi^{i_1+\dots+i_m+i_{m+1}} &= \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_m=0}^{\infty} \varphi^{i_1+\dots+i_m} \right) \left(\sum_{i_{m+1}=0}^{\infty} \varphi^{i_{m+1}} \right) \\ &= \frac{1}{(1-\varphi)^m} \times \frac{1}{1-\varphi} = \frac{1}{(1-\varphi)^{m+1}} \end{aligned}$$

Donc le théorème est démontré pour tout ordre m .

Enfin pour un modèle AR(m) ayant la forme $(1 - \varphi B)^m X_t = \varepsilon_t$, si k_0 chocs unitaires à l'innovation ε_t se produisant aux temps t_1, t_2, \dots, t_{k_0} , la RIA est obtenue sans difficulté:

$$RIA = \frac{k_0}{(1-\varphi)^m}$$

THÉORÈME 3

On considère ici un processus stationnaire X_t généré par un modèle AR(m) ayant la forme :

$$(1-\varphi_1 B)(1-\varphi_2 B)\dots(1-\varphi_m B)X_t = \varepsilon_t$$

où les $\varphi_i, i = 1, \dots, m$ sont des réels distincts et chaque racine $1/\varphi_i$ du polynôme autorégressif a un ordre de multiplicité égal à 1. Le processus X_t a une représentation $MA(\infty)$ de la forme:

$$X_t = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m A_i \varphi_i^h \right) \varepsilon_{t-h}$$

où

$$A_i = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i - \varphi_1)(\varphi_i - \varphi_2)\dots(\varphi_i - \varphi_{i-1})(\varphi_i - \varphi_{i+1})\dots(\varphi_i - \varphi_m)}, \quad i = 1, \dots, m$$

La RIA est donnée par :

$$RIA = \sum_{h=0}^{\infty} \theta_h = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1-\varphi_i}$$

où $\theta_h = \sum_{i=1}^m A_i \varphi_i^h$

Preuve: le processus X_t est stationnaire et il a une représentation $MA(\infty)$ de la forme:

$$X_t = \frac{1}{(1-\varphi_1 B)(1-\varphi_2 B)\dots(1-\varphi_m B)} \varepsilon_t = \sum_{h=0}^{\infty} \theta_h \varepsilon_{t-h} \quad (4.1)$$

Les racines du dénominateur sont réelles et différentes, donc la fraction

$\frac{1}{(1-\varphi_1 B)(1-\varphi_2 B)\dots(1-\varphi_m B)}$ se décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-\varphi_1 B)(1-\varphi_2 B)\dots(1-\varphi_m B)} = \frac{A_1}{(1-\varphi_1 B)} + \frac{A_2}{(1-\varphi_2 B)} + \dots + \frac{A_m}{(1-\varphi_m B)}$$

En multipliant chaque membre par $(1 - \varphi_i B)$, on obtient:

$$\frac{1}{(1 - \varphi_1 B) \dots (1 - \varphi_{i-1} B) (1 - \varphi_{i+1} B) \dots (1 - \varphi_m B)} = \frac{A_1 (1 - \varphi_i B)}{(1 - \varphi_1 B)} + \dots + A_i + \dots + \frac{A_m (1 - \varphi_i B)}{(1 - \varphi_m B)}$$

Si on pose $B = 1/\varphi_i$, alors on obtient directement la valeur de A_i

$$A_i = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i - \varphi_1)(\varphi_i - \varphi_2) \dots (\varphi_i - \varphi_{i-1})(\varphi_i - \varphi_{i+1}) \dots (\varphi_i - \varphi_m)} \tag{4.2}$$

La représentation $MA(\infty)$ permet de calculer directement la RIA:

$$X_t = \sum_{h=0}^{\infty} A_1 \varphi_1^h \varepsilon_{t-h} + \dots + \sum_{h=0}^{\infty} A_m \varphi_m^h \varepsilon_{t-h} = \sum_{i=1}^m \left(A_i \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_i^h \varepsilon_{t-h} \right)$$

$$RIA = \sum_{i=1}^m \left(A_i \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_i^h \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{A_i}{1 - \varphi_i} \right) \tag{4.3}$$

SIMULATION ET CALCUL NUMÉRIQUE

Dans la suite, on a simulé le modèle AR(2) suivant:

$$(1 - 0.2B)(1 - 0.6B)X_t = \varepsilon_t$$

où ε_t est un bruit blanc de variance unitaire. La taille de la série simulée est 600. Pour minimiser l'effet des valeurs initiales, on a retenu les dernières 500 observations. On suppose qu'un choc unitaire temporaire se produit au temps $t_0 = 500$. La fonction de réponse impulsionnelle et l'impact du choc sur le processus figurent dans les graphiques suivants¹.

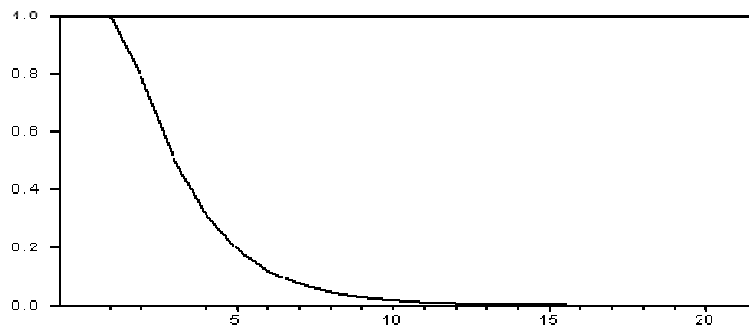


Figure 1. Fonction de réponse impulsionnelle FRI(t).

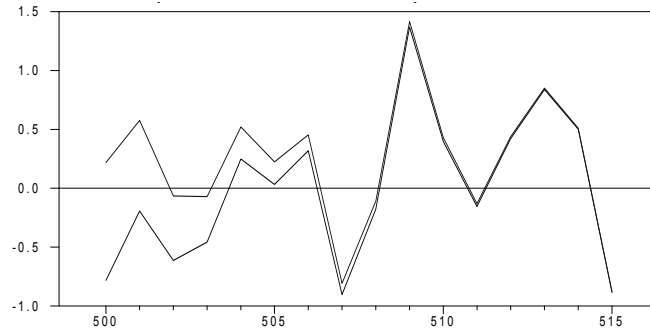


Figure 2. Impact du choc sur le processus AR(2).

On observe une absorption très rapide de ce choc. En fait, le processus retrouve sa situation initiale avant le choc après environ dix horizons.

En utilisant le théorème (3), le modèle AR(2) avec $\varphi_1 = 0.2$, $\varphi_2 = 0.6$, aboutit au suivant:

$$A_1 = \frac{\varphi_1}{(\varphi_1 - \varphi_2)} = -0.5, \quad A_2 = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2 - \varphi_1)} = 1.5$$

$$AIR = \frac{A_1}{1 - \varphi_1} + \frac{A_2}{1 - \varphi_2} = 3.125$$

On a répété cette simulation 10000 fois. La moyenne et l'écart - type des réponses impulsionnelles accumulées sont respectivement (3.131) et (0.3). La moyenne empirique des RIA (3.131) est presque égale à la valeur proposée par le calcul théorique (3.125). Le graphique des RIA obtenues est :

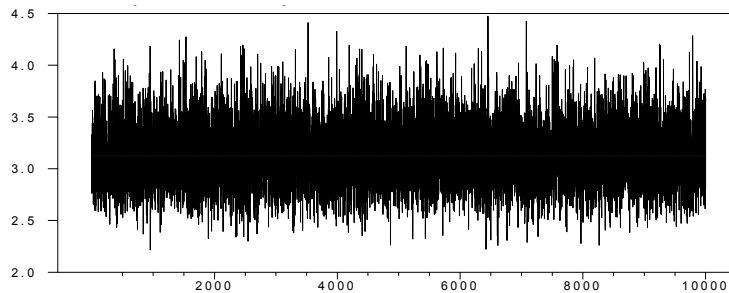


Figure 3. Réponses impulsionnelles accumulées RIA(t).

Le résultat de du théorème (2) montre clairement que la RIA est très sensible aux valeurs de φ et m . Dans le cas du modèle $(1-\varphi B)^m X_t = \varepsilon_t$, on a calculé la RIA pour $\varphi \in]-1, +1[- \{0\}$ et $(m = 1, \dots, 10)$ (voir annexe).

Pour m donné et φ variable, la dérivée de la fonction $RIA(\varphi) = \frac{1}{(1-\varphi)^m}$ est $\frac{m}{(1-\varphi)^{m+1}}$. Cette dérivée est strictement positive et par suite la $RIA(\varphi)$ est une fonction croissante de φ .

Pour φ donné et m variable, la dérivée de la fonction $RIA(m) = \frac{1}{(1-\varphi)^m}$ est $\frac{-\ln(1-\varphi)}{(1-\varphi)^m}$.

Deux cas se présentent :

Premier cas : $-1 < \varphi < 0$

La dérivée est strictement négative et par suite la $RIA(m)$ est une fonction décroissante de m .

Deuxième cas : $0 < \varphi < 1$

La dérivée est strictement positive et par suite la $RIA(m)$ est une fonction croissante de m .

CONCLUSION

Dans ce papier, on a calculé explicitement la fonction de réponse impulsionnelle (FRI) et la réponse impulsionnelle accumulée (RIA) dans deux types des modèles autorégressifs : Le premier ayant un polynôme autorégressif qui a une seule racine d'un ordre de multiplicité plus grand ou égal à un ; le second ayant un polynôme autorégressif qui a m racines réelles distinctes dont chacune a un ordre de multiplicité égal à un. Puis nous avons simulé un processus AR(2) 10 000 fois et nous avons calculé les différentes valeurs de la RIA : la moyenne empirique des RIA s'est révélée presque égale à la valeur proposée par le calcul théorique. Finalement en se basant sur le résultat du théorème (1) et pour m donné, la fonction $RIA(\varphi)$ augmente avec φ . Pour φ donné, le sens de variation de la fonction $RIA(m)$ dépend du signe de φ : la $RIA(m)$ est décroissante pour φ négatif et elle est croissante pour φ positif.

RÉFÉRENCES

- Babecká, O. 2009. Transmission of exchange rate shocks into domestic inflation: the case of the Czech Republic. *Czech Journal of Economics and Finance*, 59(2): 137-152.
- Gourieroux, C., Monfort, A. 1995. *Séries temporelles et modèles dynamiques*. 2ème édition, Economica, Paris.
- Hall, A., Inoue, A., Nason, J.M. and Rossi, B. 2009. Information criteria for impulse response function matching estimation of DSGE models. Working paper, J.E.L. Codes: C32,

- E47, C52, C53. This paper is accepted for publication in *Journal of Econometrics* during the year 2011.
- Hosain, B. 2010. Private sector response to public capital formation: an impulse response analysis. *Journal of International Business and Economics (JIBE)*, 10(3): 107-117.
- Indjehagopian, J.P., Mourad, M. 1993. *VAR modelling of macroeconomic time series: causality an shock analysis*. DR 93061, CERESSEC, France.
- Jorda, O. 2005. Estimation and inference of impulse responses by local projections. *American Economic Review*, 95(1): 161-182.
- Judge, G.G., Hill, R.C., Griffiths, W.E., Lütkepohl, H., Lee, T.-C., 1988. *Introduction to the theory and practice of econometrics*. 2nd edition, John Wiley & Sons.
- Koop, G., Pesaran, M.H. and Potter, S.M. 1996. Impulse response analysis in nonlinear multivariate models. *Journal of Econometrics*, 74(1): 119-147.
- Leigh, D., Rossi, M. 2002. *Exchange rate pass-through in Turkey*. IMF Working paper, WP /02/204.
- Lütkepohl, H. 1989. A note on the asymptotic distribution of impulse response functions of estimated VAR models with orthogonal residuals. *Journal of Econometrics*, 42: 371-376.
- Lütkepohl, H. 1990. Asymptotic distributions of impulse response functions and forecast error variance decompositions of vector autoregressive models. *Review of Economic and Statistics*, 72: 116-125.
- Mitchell, J. 2009. *The importance of long run structure for impulse response analysis in VAR models*. Working paper, JEL classification: C32 E17 E24 E32
- Mitnik, S., Zadrozny, P.A. 1993. Asymptotic distributions of impulse responses, step responses and variance decompositions of estimated linear dynamic models. *Econometrica*, 61: 857-870.
- Pao, L.C. and Shinichi, S. 2007. Estimation of impulse response functions using long autoregression. *Econometrics Journal*, 10(2): 453-469.
- Pesaran, M.H. and Shin, Y. 1998. Generalised impulse response analysis in linear multivariate models. *Economics Letters*, 58(1): 17-29.
- Phillips, P.C.B. 1998. Impulse response and forecast error variance asymptotics in nonstationary VAR's. *Journal of Econometrics*, 83(1-2): 21-56.

Annexe

