

DEFORMATION D'UN STRATIFIE COMPOSITE AU VOISINAGE D'ACTIONNEURS PIEZOELECTRIQUES DISCRETS INTEGRES DANS LE STRATIFIE

Louay ElSoufi^{1,3}, Khaled Khalil² et Rémy Lachat³

¹ Université Libanaise, Faculté de Génie, Hadath, Beyrouth, Liban

² Centre Universitaire de Technologie, Deddeh, EL-Koura, Liban

³ Laboratoire M3M, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard,
90010 Belfort, France
louay.el-soufi@utbm.fr

(Received 14 November 2005 - Accepted 29 April 2006)

RESUME

Dans cette étude, on a écrit un modèle de comportement pour des plaques isotropes et stratifiées en composites actifs (contiennent des actionneurs piézoélectriques) dans le cas d'encastrement – libre. Trois méthodes de résolution de telles équations ont été proposées et une quatrième par éléments finis à partir du logiciel ROBOT. Les résultats donnés par les différentes méthodes sont très proches entre eux et aussi avec ceux donnés par ROBOT. Dans tous les cas, l'écart est inférieur à 10%. Une fois la méthode de calcul est vérifiée, l'influence de plusieurs paramètres sur le comportement en flexion des plaques a été étudiée comme: pourcentage de fibre, l'épaisseur, l'orientation et la disposition des plis dans les plaques, et la tension appliquée. Dans tous les cas de calcul, des modules équivalents ont été utilisés tenant compte des contraintes mécaniques du composite et des actionneurs. Par ailleurs, on a trouvé que la disposition localisée d'un actionneur dans une plaque ou son équivalent réparti sur toute la plaque donne les mêmes résultats, ce qui facilite bien la résolution des équations de comportement.

Mots clés: structure active, composite stratifié actif, actionneurs piézocéramiques, modélisation, modules équivalents

ABSTRACT

In this study, a model of behavior was written of the isotropic plates and multi-layer plates of active composites (contain piezoelectric actuators) in the case of fixed-free plate. Three methods of resolution were proposed to solve relevant equations, and a fourth one by finite elements using a ROBOT program. The results given by the different methods were so close to each other and to the one given by the ROBOT program. In most cases the difference never exceeded 10%. Once the method is verified the influence of many parameters on the flexion behavior of the plates was studied, for instance: fiber percentage, thickness, orientation and positioning of the plies inside the plates, and the voltage applied. In all of cases of calculation, equivalent modules have been used taking into consideration the

mechanical constraint of composite and actuators. However, it was found that the positioning located of an actuator in a plate or covered its equivalent on all over the plate gives same results which facilitates the resolution of the behavior equations.

Keywords : smart structure, piezoceramic actuators, modeling, isotropic composite, stratified composite, equivalent modulus

INTRODUCTION

Les premiers développements des matériaux composites ont été liés aux besoins des industries aérospatiales en matériaux à caractéristiques mécaniques élevées associés à un faible poids (Chandra & Chopra, 1993 ; Ganesan & Kadoli, 2003). Actuellement, ils sont présents dans tous les secteurs industriels. Par conséquent, on a besoin d'élaborer des modèles mathématiques suffisamment précis, qui décrivent et prévoient le comportement de ces matériaux.

Actuellement, les systèmes électroniques sont utilisés dans le contrôle des systèmes mécaniques, y compris dans les matériaux (Cen *et al.*, 2002), d'où les matériaux intelligents ou matériaux actifs. Ces derniers sont devenus des sujets de recherches et de développements récents, pour améliorer autant que possible leurs propriétés.

Les matériaux actifs ont des capacités intrinsèques et extrinsèques leur permettant tout d'abord de répondre aux excitations et aux changements qui se produisent dans l'environnement, puis d'activer en conséquence leurs fonctions correspondantes. Les stimuli peuvent venir de l'intérieur ou de l'extérieur. Depuis ses débuts, la science des matériaux a évolué, de l'usage de matériaux structurels inertes à celui de matériaux fabriqués dans un but particulier, en passant par des matériaux actifs ou adaptatifs (Desai *et al.*, 2003; Ha *et al.*, 1992 ; Yan & Yam, 2003), pour en arriver aux matériaux intelligents qui ont des capacités de reconnaissance, de discrimination et de réaction plus précises. Pour avoir de telles capacités, les matériaux et les alliages nouveaux doivent répondre à plusieurs spécifications fondamentales.

Nomenclature

u, v, w	Déplacement dans les directions x, y et z , respectivement au point (x, y, z)
a, b	Respectivement longueur et largeur des actionneurs piézoélectriques
A, B	Respectivement, longueur et largeur de la plaque
h_1, h_2	Respectivement, épaisseur de la partie de la plaque située au dessus et au dessous des actionneurs
h_e	Épaisseur de la partie de la plaque en dehors des actionneurs dans le cas de symétrie miroir d'actionneurs piézoélectriques qui ont les mêmes propriétés mécaniques et piézoélectriques
h	Épaisseur de la plaque
h_p	Épaisseur d'un pli dans le cas de stratifiée composite
e_1, e_2	Épaisseurs des actionneurs
e	Épaisseurs des actionneurs dans le cas d'actionneurs piézoélectriques qui ont les mêmes propriétés
θ_k	Orientation de $k^{ème}$ pli
z_k	Position verticale de $k^{ème}$ pli
χ_{pe}	Fonction caractéristique des actionneurs
d_{31}	Coefficient piézoélectrique : le déplacement dans la direction x ou y produit par le champ électrique qui prend la direction de z
V_1, V_2	Tension appliquée respectivement sur le premier et le deuxième actionneur

E, E_{p1}, E_{p2}	Module d'Young respectivement du matériau de support (plaque seule sans actionneurs) et des actionneurs (cas de composite isotrope)
E_1, E_2	Module d'Young des plis unidirectionnels qui constituent le matériau de support respectivement dans la direction de x et de y (cas de stratifié composite)
E_{Gx}, E_{Gy}	Modules d'Young équivalents globaux de la plaque y compris les actionneurs respectivement dans les directions y et x
G, G_{p1}, G_{p2}	Module de cisaillement respectivement du matériau de support (plaque seule sans actionneurs) et des actionneurs (cas de composite isotrope)
G_{12}	Module de cisaillement des plis unidirectionnels (dans le cas de stratifié composite)
ν, ν_{p1}, ν_{p2}	Coefficient de Poisson respectivement du matériau de support (plaque seule sans actionneurs) et des actionneurs (cas de composite isotrope)
ν_{12}, ν_{21}	Coefficients de poisson des plis unidirectionnels qui constituent le matériau de support (cas de stratifié composite)
ν_{Gx}, ν_{Gy}	Coefficients de Poisson équivalents globaux de la plaque y compris les actionneurs respectivement dans les directions y et x
ρ	Masse volumique du matériau de support
ρ_{p1}, ρ_{p2}	Masse volumique des actionneurs
N_x	Flux d'effort : effort résultant dans la direction de x par unité de longueur suivant la direction de y
N_y	Flux d'effort : effort résultant dans la direction de y par unité de longueur suivant la direction de x
N_{xy}	Flux d'effort : cisaillement de membrane par unité de longueur suivant la direction de x
M_x	Moment fléchissant d'axe x dû aux contraintes suivant y par unité de longueur dans la direction de x
M_y	Moment fléchissant d'axe y dû aux contraintes suivant x par unité de longueur dans la direction de y
$(N_x)_{pe}, (N_y)_{pe}$	Flux d'effort produit par les actionneurs piézoélectriques
$(M_x)_{pe}, (M_y)_{pe}$	Moments fléchissants produits par les actionneurs piézoélectriques
[A]	Matrice de rigidité
[B]	Matrice de couplage membrane-flexion-torsion
[D]	Matrice de rigidité en flexion
\hat{q}_x, \hat{q}_y	Efforts extérieurs dans les directions de x et de y appliqués sur le système
\hat{m}_x, \hat{m}_y	Moments extérieurs dans les directions de x et de y appliqués sur le système
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$	Déformation respectivement selon x, y et xy
k_x, k_y, k_{xy}	Courbures respectivement dans les directions de x, y et perpendiculaire au plan xy
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Contrainte respectivement selon x, y et xy
$\sigma_{x(pe)}, \sigma_{y(pe)}, \tau_{xy(pe)}$	Contrainte excitée par les actionneurs piézoélectriques respectivement selon x, y et xy

DESCRIPTION DU MODELE ETUDIE

Le modèle étudié est constitué d'une plaque encadrée-libre, mince et plane comme l'indique la Figure 1.

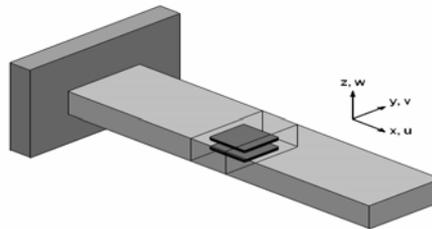


Figure 1. Le modèle étudié.

Deux actionneurs piézocéramiques PZT (P_1 et P_2) de forme rectangulaire sont intégrés dans la plaque lors de moulage comme l'indique la figure ci-dessous. L'étude se fait d'abord pour des matériaux composites isotropes, puis pour des stratifiés actifs.

La plaque est constituée soit :

- Mate de verre/polyester de 30 % de verre en volume (cas isotrope).
- Stratifié actif verre/polyester, 30 % de verre en volume, d'orientation de fibre bien déterminée (cas anisotrope).

ETUDE GENERALE DE COMPORTEMENT D'UNE PLAQUE ISOTROPE ACTIVE

Les contraintes sont données par (Banks *et al.*, 1996 ; Decolon, 2000 ; Berthelot, 1999) :

$$\begin{cases} \text{- Plaque} \\ \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(e_x + \nu e_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(e_y + \nu e_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{- Actionneurs PZT} \\ \sigma_x = \frac{E_p}{1-\nu_p^2}(e_x + \nu_p e_y) \\ \sigma_y = \frac{E_p}{1-\nu_p^2}(e_y + \nu_p e_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (2)$$

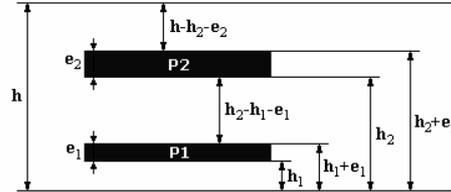


Figure 2. Description de la zone des actionneurs (cas général).

L'étude suivante sera faite pour $(-a/2 < x < a/2)$ et $(-b/2 < y < b/2)$, c'est à dire dans la région de la plaque où se trouvent les actionneurs (Banks *et al.*, 1996) puis par extrapolation convenable, en élargissant l'étude sur la plaque toute entière.

Les flux des efforts et les moments sont obtenus en intégrant les contraintes sur z , alors on obtient la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{cases}
 A_{11} = (h - e_1 - e_2) \frac{E}{1 - \nu^2} + e_1 \frac{E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} + e_2 \frac{E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} \\
 A_{12} = (h - e_1 - e_2) \frac{\nu E}{1 - \nu^2} + e_1 \frac{\nu_{p1} E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} + e_2 \frac{\nu_{p2} E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} \\
 A_{66} = (h - e_1 - e_2) \frac{E}{2(1 + \nu)} + e_1 \frac{E_{p1}}{2(1 + \nu_{p1})} + e_2 \frac{E_{p2}}{2(1 + \nu_{p2})}
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 B_{11} = \left(\frac{h^2}{2} - h_1 e_1 - h_2 e_2 - \frac{e_1^2}{2} - \frac{e_2^2}{2} \right) \frac{E}{1 - \nu^2} + \left(h_1 e_1 + \frac{e_1^2}{2} \right) \frac{E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} + \left(h_2 e_2 + \frac{e_2^2}{2} \right) \frac{E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} \\
 B_{12} = \left(\frac{h^2}{2} - h_1 e_1 - h_2 e_2 - \frac{e_1^2}{2} - \frac{e_2^2}{2} \right) \frac{\nu E}{1 - \nu^2} + \left(h_1 e_1 + \frac{e_1^2}{2} \right) \frac{\nu_{p1} E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} + \left(h_2 e_2 + \frac{e_2^2}{2} \right) \frac{\nu_{p2} E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} \\
 B_{66} = \left(\frac{h^2}{2} - h_1 e_1 - h_2 e_2 - \frac{e_1^2}{2} - \frac{e_2^2}{2} \right) \frac{E}{2(1 + \nu)} + \left(h_1 e_1 + \frac{e_1^2}{2} \right) \frac{E_{p1}}{2(1 + \nu_{p1})} + \left(h_2 e_2 + \frac{e_2^2}{2} \right) \frac{E_{p2}}{2(1 + \nu_{p2})}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 D_{11} = \left[\frac{h^3}{3} - h_1^2 e_1 - h_1 e_1^2 - h_2^2 e_2 - h_2 e_2^2 - \frac{e_1^3}{3} - \frac{e_2^3}{3} \right] \frac{E}{1 - \nu^2} + \left[h_1^2 e_1 + h_1 e_1^2 + \frac{e_1^3}{3} \right] \frac{E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} + \left[h_2^2 e_2 + h_2 e_2^2 + \frac{e_2^3}{3} \right] \frac{E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} \\
 D_{12} = \left[\frac{h^3}{3} - h_1^2 e_1 - h_1 e_1^2 - h_2^2 e_2 - h_2 e_2^2 - \frac{e_1^3}{3} - \frac{e_2^3}{3} \right] \frac{\nu E}{1 - \nu^2} + \left[h_1^2 e_1 + h_1 e_1^2 + \frac{e_1^3}{3} \right] \frac{\nu_{p1} E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} + \left[h_2^2 e_2 + h_2 e_2^2 + \frac{e_2^3}{3} \right] \frac{\nu_{p2} E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} \\
 D_{66} = \left[\frac{h^3}{3} - h_1^2 e_1 - h_1 e_1^2 - h_2^2 e_2 - h_2 e_2^2 - \frac{e_1^3}{3} - \frac{e_2^3}{3} \right] \frac{E}{2(1 + \nu)} + \left[h_1^2 e_1 + h_1 e_1^2 + \frac{e_1^3}{3} \right] \frac{E_{p1}}{2(1 + \nu_{p1})} + \left[h_2^2 e_2 + h_2 e_2^2 + \frac{e_2^3}{3} \right] \frac{E_{p2}}{2(1 + \nu_{p2})}
 \end{cases} \quad (4)$$

Pour l'actionneur piézoélectrique on peut définir d'après Banks *et al.*, (1996) :

$$\begin{cases}
 (e_x)_{pe1} = (e_y)_{pe1} = \frac{d_{31}}{e_1} V_1 \\
 (e_x)_{pe2} = (e_y)_{pe2} = \frac{d_{31}}{e_2} V_2
 \end{cases} \quad (5) \quad \text{alors :} \quad \begin{cases}
 (\sigma_x)_{pe1} = (\sigma_y)_{pe1} = \frac{-E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} \frac{d_{31}}{e_1} V_1 \\
 (\sigma_x)_{pe2} = (\sigma_y)_{pe2} = \frac{-E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} \frac{d_{31}}{e_2} V_2
 \end{cases} \quad (6)$$

$$(N_x)_{pe1} = \int_0^1 (\sigma_x)_{pe} dz \Rightarrow \begin{cases}
 (N_x)_{pe1} = (N_y)_{pe1} = \frac{-E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} d_{31} V_1 \\
 (N_x)_{pe2} = (N_y)_{pe2} = \frac{-E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} d_{31} V_2
 \end{cases} \quad (8)$$

$$(M_x)_{pe1} = \int_0^1 (\sigma_x)_{pe} z dz \Rightarrow \begin{cases}
 (M_x)_{pe1} = (M_y)_{pe1} = \frac{-E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} \frac{d_{31}}{e_1} V_1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{h_1}^{h_1 + e_1} = \frac{-E_{p1}}{1 - \nu_{p1}^2} d_{31} V_1 \left(h_1 + \frac{e_1}{2} \right) \\
 (M_x)_{pe2} = (M_y)_{pe2} = \frac{-E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} \frac{d_{31}}{e_2} V_2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{h_2}^{h_2 + e_2} = \frac{-E_{p2}}{1 - \nu_{p2}^2} d_{31} V_2 \left(h_2 + \frac{e_2}{2} \right)
 \end{cases}$$

L'excitation produite par les actionneurs peut s'exprimer comme le suivant :

$$\begin{cases}
 (N_x)_{pe} = [(N_x)_{pe1} + (N_x)_{pe2}] \chi_{pe}(x, y) S(x) \tilde{S}(y) \\
 (N_y)_{pe} = [(N_y)_{pe1} + (N_y)_{pe2}] \chi_{pe}(x, y) S(x) \tilde{S}(y) \\
 (M_x)_{pe} = [(M_x)_{pe1} + (M_x)_{pe2}] \chi_{pe}(x, y) \\
 (M_y)_{pe} = [(M_y)_{pe1} + (M_y)_{pe2}] \chi_{pe}(x, y) \\
 (N_{xy})_{pe} = (M_{xy})_{pe} = \mathbf{0}
 \end{cases} \quad (9) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \chi_{pe}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \text{ et } -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sin on} \end{cases} \\
 S(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \tilde{S}(y) = \begin{cases} -1 & \text{si } y < 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \\ 1 & \text{si } y > 0 \end{cases}
 \end{array} \right.$$

Où : $S(x)$ et $\tilde{S}(y)$ fonctions 'indicateur', $\chi_{pe}(x, y)$ fonction caractéristique.

COMPORTEMENT D'UNE PLAQUE EN MATERIAU COMPOSITE ISOTROPE ACTIF

Pour simplifier les expressions assez complexes dans (3) et (4), on va étudier le cas de la symétrie miroir d'actionneurs qui ont les mêmes propriétés mécaniques et piézoélectriques comme l'indique la Figure 3, alors la matrice de couplage $[B] = [0]$.

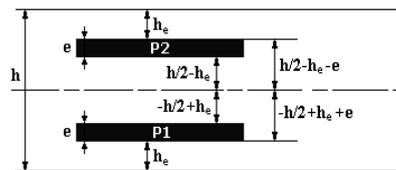
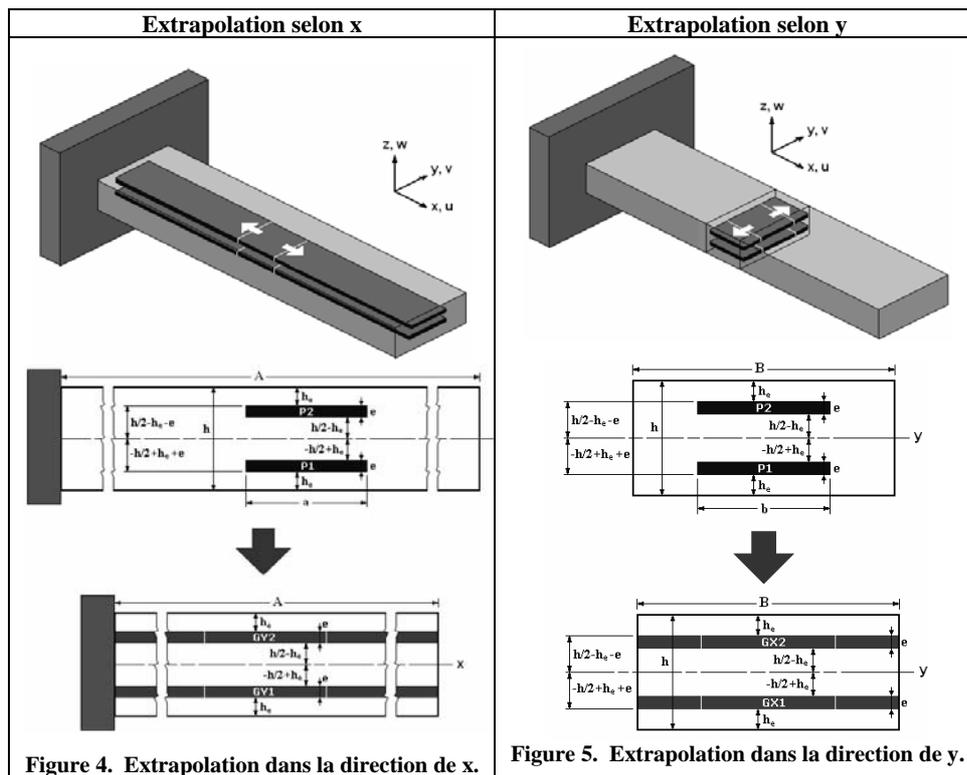


Figure 3. Description de la zone des actionneurs (cas simplifié).

Pour globaliser le cas de travail dans la zone des actionneurs et pour couvrir la plaque toute entière, on a appliqué une méthode d'extrapolation sur le modèle dans les 2 directions x et y comme l'indiquent les Figures 4 et 5.



<p>On sait que : $E_{equiv} = \sum(V_i E_i)$ et avec V_i : fraction volumique de la région i, E_i : module d'Young, ν_i : coefficient de Poisson. La fraction volumique de chaque actionneur</p> <p>est : $\frac{abe}{Abe} = \frac{a}{A}$, alors :</p> $\begin{cases} E_{GY1} = E_{GY2} = E_p \frac{a}{A} + E \left(1 - \frac{a}{A}\right) \\ \nu_{GY1} = \nu_{GY2} = \nu_p \frac{a}{A} + \nu \left(1 - \frac{a}{A}\right) \end{cases} \quad (10)$	<p>La fraction volumique de chaque actionneur est : $\frac{abe}{aBe} = \frac{b}{B}$, alors :</p> $\begin{cases} E_{GX1} = E_{GX2} = E_p \frac{b}{B} + E \left(1 - \frac{b}{B}\right) \\ \nu_{GX1} = \nu_{GX2} = \nu_p \frac{b}{B} + \nu \left(1 - \frac{b}{B}\right) \end{cases} \quad (11)$
<p>Alors, on va remplacer E_p dans $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y$ et M_{xy} par E_{GY1} ou E_{GY2} soit E_{GY} et par E_{GX1} ou E_{GX2} soit E_{GX}.</p>	

Finalement, l'équilibre de la structure proposée est décrit par :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= \hat{q}_x \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \hat{q}_y \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} &= \hat{m}_x + \hat{m}_y \end{aligned} \right. \quad (12) \quad \text{Où :} \quad \left\{ \begin{aligned} N_x &= A_{11}\epsilon_x + A_{12}\epsilon_y \\ N_{xy} &= A_{66y}\epsilon_{xy} \\ N_y &= A_{21}\epsilon_x + A_{22}\epsilon_y \\ N_{yx} &= A_{66x}\epsilon_{xy} \\ M_x &= D_{11}k_x + D_{12}k_y \\ M_{xy} &= D_{66y}k_{xy} \\ M_y &= D_{21}k_x + D_{22}k_y \\ M_{yx} &= D_{66x}k_{xy} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Le système d'équations différentielles (12) donne l'équation différentielle de 4^{ème} ordre suivante qui lie la flèche w (déplacement selon z) avec les moments appliqués sur la structure :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_{12} + D_{21} + 2D_{66x} + 2D_{66y}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \quad (14)$$

Avec :

$$\begin{cases}
 A_{11} = (h - 2e) \frac{E}{1 - \nu^2} + 2e \frac{E_{GX}}{1 - \nu_{GX}^2} \\
 A_{12} = (h - 2e) \frac{\nu E}{1 - \nu^2} + 2e \frac{\nu_{GX} E_{GX}}{1 - \nu_{GX}^2} \\
 A_{21} = (h - 2e) \frac{\nu E}{1 - \nu^2} + 2e \frac{\nu_{GY} E_{GY}}{1 - \nu_{GY}^2} \\
 A_{22} = (h - 2e) \frac{E}{1 - \nu^2} + 2e \frac{E_{GY}}{1 - \nu_{GY}^2} \\
 A_{66x} = (h - 2e) \frac{E}{2(1 + \nu)} + 2e \frac{E_{GX}}{2(1 + \nu_{GX})} \\
 A_{66y} = (h - 2e) \frac{E}{2(1 + \nu)} + 2e \frac{E_{GY}}{2(1 + \nu_{GY})} \\
 D_{11} = H_1 \frac{E}{1 - \nu^2} + H_2 \frac{E_{GX}}{1 - \nu_{GX}^2} \\
 D_{12} = H_1 \frac{\nu E}{1 - \nu^2} + H_2 \frac{\nu_{GX} E_{GX}}{1 - \nu_{GX}^2} \\
 D_{21} = H_1 \frac{\nu E}{1 - \nu^2} + H_2 \frac{\nu_{GY} E_{GY}}{1 - \nu_{GY}^2} \\
 D_{22} = H_1 \frac{E}{1 - \nu^2} + H_2 \frac{E_{GY}}{1 - \nu_{GY}^2} \\
 D_{66x} = H_1 \frac{E}{2(1 + \nu)} + H_2 \frac{E_{GX}}{2(1 + \nu_{GX})} \\
 D_{66y} = H_1 \frac{E}{2(1 + \nu)} + H_2 \frac{E_{GY}}{2(1 + \nu_{GY})}
 \end{cases}$$

(15)

Et :

$$\begin{cases}
 H_1 = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} h^2 h_e - 3 h h_e^2 + 2 h_e^3 + 2 \left(\frac{h}{2} - h_e - e \right)^3 \right] \\
 H_2 = \frac{1}{2} h^2 e - 2 h h_e e - h e^2 + 2 h_e^2 e + 2 h_e e^2 + 2 e^3 \\
 E_{GX} = E_p \frac{b}{B} + E \left(1 - \frac{b}{B} \right) \\
 \nu_{GX} = \nu_p \frac{b}{B} + \nu \left(1 - \frac{b}{B} \right) \\
 E_{GY} = E_p \frac{a}{A} + E \left(1 - \frac{a}{A} \right) \\
 \nu_{GY} = \nu_p \frac{a}{A} + \nu \left(1 - \frac{a}{A} \right)
 \end{cases}$$

(16)

COMPORTEMENT D'UNE PLAQUE EN COMPOSITE STRATIFIE ACTIF

Dans le cas de la symétrie miroir d'actionneurs de mêmes propriétés avec le matériau de support et en composite possédant de plis croisés :

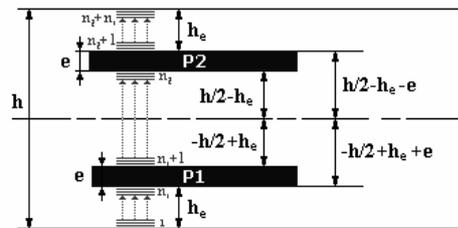


Figure 6. Description de la zone des actionneurs (cas stratifié).

$E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}$: Propriétés d'un pli unidirectionnel.

θ_k : orientation de $k^{ème}$ pli.

h_p : épaisseur d'un pli.

$s_k = \sin \theta_k$.

$c_k = \cos \theta_k$.

Le système des équations d'équilibre est donné par Banks *et al.* (1996) :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{n_1} = h_1 \\ z_{n_1+1} = h_1 + e_1 \\ z_{n_2} = h_2 \\ z_{n_2+1} = h_2 + e_2 \\ z_{n_3} = h \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = \hat{q}_x \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \hat{q}_y \\ -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \hat{m}_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{m}_y}{\partial x} \end{array} \right. \quad (17)$$

L'équation différentielle de 4^{ème} ordre de la flèche **w** est obtenue comme la suivante :

$$\bar{D}_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{D}_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (2\bar{D}_{12} + 4\bar{D}_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{\partial^2 (M_x)_{pe}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (M_y)_{pe}}{\partial y^2} \quad (18)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{D}_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n_1} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{11k} + \left(h_1^2 e_1 + h_1 e_1^2 + \frac{e_1^3}{3} \right) \frac{E_{p1}}{1-\nu^2} + \frac{1}{3} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{11k} \\ \quad + \left(h_2^2 e_2 + h_2 e_2^2 + \frac{e_2^3}{3} \right) \frac{E_{p2}}{1-\nu^2} + \frac{1}{3} \sum_{k=n_2+1}^{n_3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{11k} \\ \bar{D}_{12} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n_1} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{12k} + \left(h_1^2 e_1 + h_1 e_1^2 + \frac{e_1^3}{3} \right) \frac{\nu E_{p1}}{1-\nu^2} + \frac{1}{3} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{12k} \\ \quad + \left(h_2^2 e_2 + h_2 e_2^2 + \frac{e_2^3}{3} \right) \frac{\nu E_{p2}}{1-\nu^2} + \frac{1}{3} \sum_{k=n_2+1}^{n_3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{12k} \\ \bar{D}_{21} = \bar{D}_{12} \\ \bar{D}_{22} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n_1} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{22k} + \left(h_1^2 e_1 + h_1 e_1^2 + \frac{e_1^3}{3} \right) \frac{E_{p1}}{1-\nu^2} + \frac{1}{3} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{22k} \\ \quad + \left(h_2^2 e_2 + h_2 e_2^2 + \frac{e_2^3}{3} \right) \frac{E_{p2}}{1-\nu^2} + \frac{1}{3} \sum_{k=n_2+1}^{n_3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{22k} \\ \bar{D}_{66} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n_1} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{66k} + \left(h_1^2 e_1 + h_1 e_1^2 + \frac{e_1^3}{3} \right) \frac{E_{p1}}{2(1+\nu)} + \frac{1}{3} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{66k} \\ \quad + \left(h_2^2 e_2 + h_2 e_2^2 + \frac{e_2^3}{3} \right) \frac{E_{p2}}{2(1+\nu)} + \frac{1}{3} \sum_{k=n_2+1}^{n_3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{66k} \end{array} \right. \quad (19)$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{11k} = c_k^4 \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + s_k^4 \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + 2c_k^2 s_k^2 \left(\frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + 2G_{12} \right) \\ Q_{12k} = c_k^2 s_k^2 \left(\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - 4G_{12} \right) + (c_k^4 + s_k^4) \frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22k} = c_k^4 \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + s_k^4 \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + 2c_k^2 s_k^2 \left(\frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + 2G_{12} \right) \\ Q_{16k} = c_k^3 s_k \left(\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - \frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - 2G_{12} \right) + c_k s_k^3 \left(\frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - 2G_{12} \right) \\ Q_{26k} = c_k s_k^3 \left(\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - \frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - 2G_{12} \right) + c_k^3 s_k \left(\frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - 2G_{12} \right) \\ Q_{66k} = c_k^2 s_k^2 \left(\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - 2 \frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} - 2G_{12} \right) + (c_k^4 + s_k^4) G_{12} \end{array} \right. \quad (20)$$

CONDITIONS AUX LIMITES

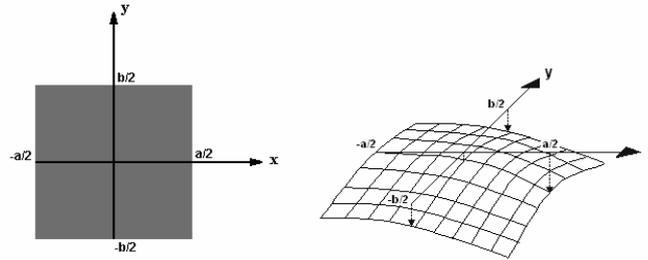


Figure 7. Surface intermédiaire de la plaque dans la région des actionneurs.

- Pour $x = -a/2$ et $\forall y$: $u = 0 ; \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ; (N_x)_{pe} = 0$.
- Pour $y = 0$ et $\forall x$: $v = 0 ; \frac{\partial w}{\partial y} = 0 ; (N_y)_{pe} = 0$.
- Pour $x = a/2$ et $\forall y$: $D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (M_x)_{pe}$.
- Pour $x = -a/2$ et $\forall y$: $D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -(M_x)_{pe}$.
- Pour $\forall x$ et $y = +b/2$: $D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -(M_y)_{pe}$.
- Pour $\forall x$ et $y = -b/2$: $D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (M_y)_{pe}$.
- Pour $x = -a/2$ et $y = 0$: $w = 0$.

METHODES DE RESOLUTIONS DANS LE CAS ISOTROPE ACTIF

Les dimensions de la plaque et des actionneurs dans le cas isotrope sont données par la Figure 8. Dans ce cas et dans le cas du composite actif stratifié qu'on va développer par la suite, on va calculer la flèche à l'extrémité de la plaque.

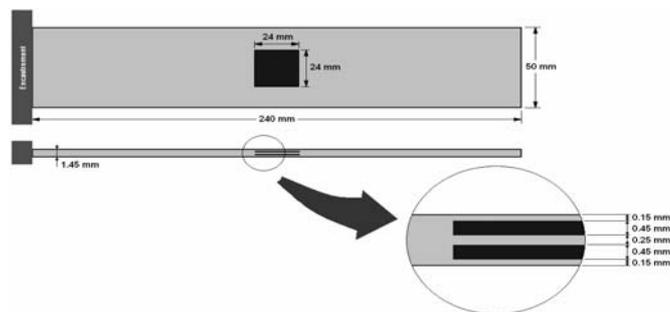


Figure 8. Dimensions de la plaque (cas isotrope).

Méthodes analytiques :

Le calcul est réalisé analytiquement à partir de l'équation (18) par trois méthodes :

- Méthode approchée [élimination de y : $\frac{\partial(\text{chaque quantité})}{\partial y} = 0$]
 - Doubles séries polynomiales [$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \phi_{mn}(x, y)$]
 - Différences finies
- $\left\{ \begin{array}{l} \phi_{mn}(x,y) : \text{fonctions connues} \\ \text{devant satisfaire au mieux les} \\ \text{conditions aux limites} \\ C_{mn} : \text{constantes dépendantes} \\ \text{des propriétés mécaniques} \\ \text{de la plaque} \end{array} \right.$

Modélisation par éléments finis (ROBOT) :

Le calcul a été aussi réalisé par la méthode des éléments finis. Le logiciel utilisé est "ROBOT" (logiciel de calcul des structures par éléments finis et de dimensionnement). Le type d'élément utilisé dans le logiciel est l'élément plaque avec maillage triangulaire. La longueur de la maille vaut en moyenne : $0.06 \times \text{longueur de la plaque}$. Le raffinement du maillage s'effectue surtout dans la zone des actionneurs. Le moment appliqué sur la plaque dans la région des actionneurs est dû à l'excentricité des forces dans les actionneurs par rapport à l'axe neutre de la plaque et il est appliqué sur les 4 côtés de cette région, c'est pour cette raison qu'on a adopté le modèle de la plaque puisque la flexion s'effectue autour des 2 axes ox et oy , alors : $M = F \times z$

L'effet de poids n'est pas pris en considération, pour pouvoir comparer avec les résultats obtenus par les méthodes précédentes. On considère que la plaque est encastree sur la ligne d'abscisse $x = 0$, et libre sur les autres côtés. Comme dans les études précédentes, on prend le cas d'une mate en verre/polyester de 30% de verre en volume, avec des actionneurs piézocéramiques soumis à des tensions $\pm 30V$. On dessine dans le logiciel, la plaque et la zone des actionneurs qui est considérée comme homogène, constituée d'un seul matériau équivalent à deux matériaux en parallèle sur cette zone où on peut considérer que les caractéristiques mécaniques équivalentes en faibles déformations peuvent donner de la façon suivante :

$$E_{equiv} = \sum_i (V_i E_i) \quad \text{et} \quad \nu_{equiv} = \sum_i (V_i \nu_i)$$

Avec V_i : fraction volumique de la région i , E_i : son module d'Young, ν_i : son coefficient de Poisson.

Les caractéristiques mécaniques sont :

Plaque : $E = 14000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $G = 5600 \text{ MPa}$, $\rho = 1660 \text{ kg/m}^3$.

Actionneurs : $E_p = 63000 \text{ MPa}$, $\nu_p = 0.3$, $G_p = 24200 \text{ MPa}$, $\rho_p = 7600 \text{ kg/m}^3$.

En faibles déformations, on peut considérer que les caractéristiques mécaniques équivalentes de cette zone sont :

Fraction volumique des actionneurs dans cette zone est :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{abe}{abh} = 2 \frac{e}{h} \quad \text{d'où} \\ E_{equ} = 2E_p \frac{e}{h} + E \left(1 - 2 \frac{e}{h} \right) = 44380 \text{ MPa} \\ \nu_{equ} = 2\nu_p \frac{e}{h} + \nu \left(1 - 2 \frac{e}{h} \right) = 0.3 \\ G_{equ} = \frac{1}{\frac{2e}{hG_p} + \frac{\left(1 - 2 \frac{e}{h} \right)}{G}} = 10698 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad (22)$$

L'étude du comportement de la plaque effectué sur le ROBOT est représentée sur la Figure 9.

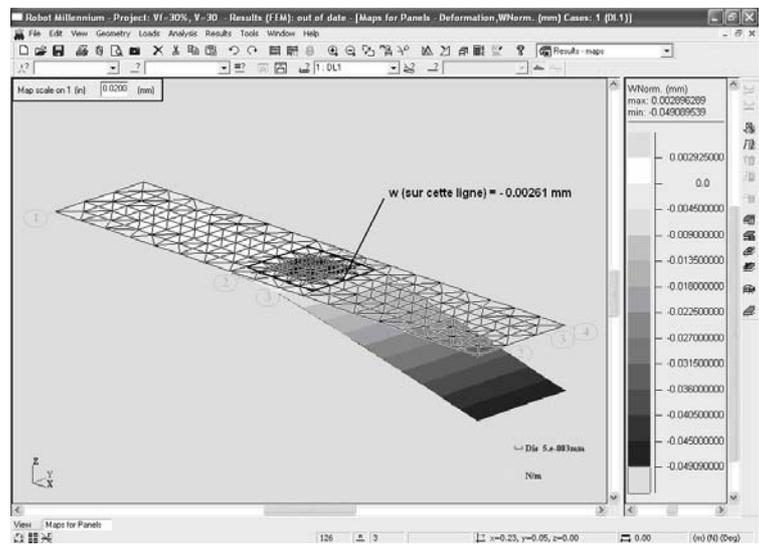


Figure 9. Comportement de la plaque (déplacement vertical) donné par ANSYS (cas isotrope).

Parmi les résultats obtenus par le logiciel, on trouve que le déplacement à la périphérie des actionneurs vaut : **w = -2.61 μm**

Discussion des résultats :

Les trois méthodes ont donné des résultats très proches entre elles comme l'indique le tableau suivant:

TABLEAU 1
Ecart avec le Résultat Donné par ROBOT

Méthode	<i>Élimination de y</i>	<i>Doubles séries polynomiales</i>	<i>Différences finies</i>	<i>ROBOT</i>
Flèche (w) [μm]	-2.37	-2.33	-2.39	-2.61
Ecart avec ROBOT [%]	9.2%	10.7%	8.4%	--

Puisque les trois méthodes ont donné des résultats proches de ceux donnés par ROBOT (écart < 10%), sachant que la dispersion sur les propriétés mécaniques des composites due à la fabrication est importante, alors on va poursuivre l'étude uniquement par modélisation sur ROBOT.

ETUDE DE COMPOSITES ACTIFS ISOTROPES

Influence de pourcentages de fibres V_f en volume et des tensions sur la flèche w :

Des composites isotropes ont été étudiés dont le taux de fibres variant de 20 à 70%, et dans chaque cas, on a activé les actionneurs PZT de 10 à 30V ; nous avons obtenu les résultats montrés sur la figure 10. On remarque q'une variation de 50% du taux de fibres conduit à une variation variant de 21% à 27% en fonction de la tension appliquée. Plus la tension est élevée, plus l'écart est grand.

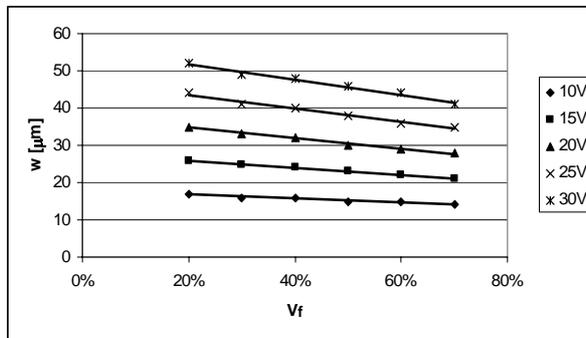


Figure 10. Variation de w avec V_f pour des différentes tensions électriques.

Influence de l'épaisseur de la plaque et des tensions sur la flèche w :

De la même manière, on a fait varier l'épaisseur de la plaque et on a obtenu les résultats illustrés sur la Figure 11.

De même, on remarque qu'une variation de 20% de l'épaisseur conduit à une variation d'autour 77% de la flèche, et ceci quelle que soit la tension appliquée aux actionneurs.

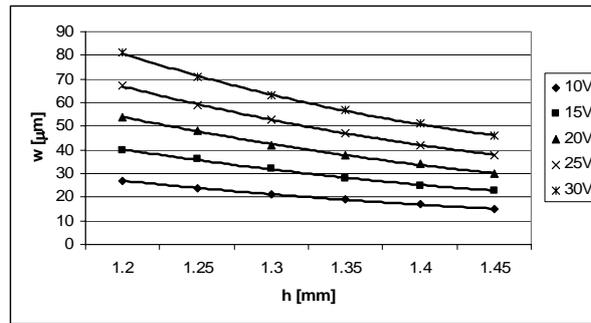


Figure 11. Variation de w avec h pour des différentes tensions électriques.

MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS (ROBOT) D'UN STRATIFIE ACTIF

Dans ce cas, la plaque est constituée d'un stratifié formé des plis unidirectionnels en verre/polyester de 30% en fibre de volume dont les caractéristiques mécaniques sont :

Orientation d'un pli, exemple d'un stratifié, (notations) :

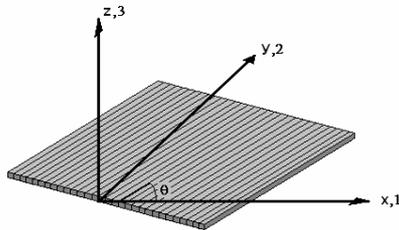


Figure 12. Pli unidirectionnel disposé à angle θ .

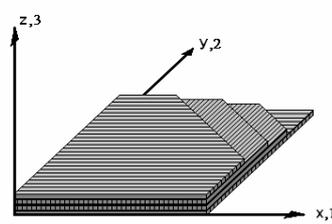


Figure 13. Stratifié composé de 4 plis, 2 à 0° et 2 à 90° , noté $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, ou bien $[0^\circ/90^\circ_2/0^\circ]$, ou bien $[0^\circ/90^\circ]_s$.

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$\begin{cases} E_1 = 25000 \text{ MPa} \\ E_2 = 5585 \text{ MPa} \\ G_{12} = 1960 \text{ MPa} \\ \nu_{12} = 0.355 \end{cases}$$

Les dimensions de la plaque, des actionneurs et des plis ainsi que leurs orientations testées dans ce cas sont données par la Figure 14.

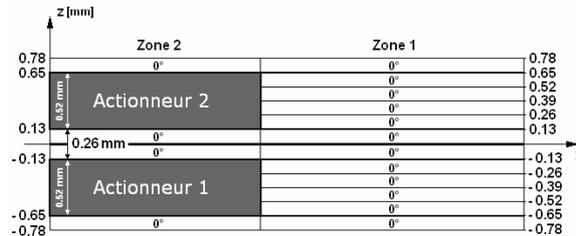


Figure 14. Dimensions et orientations des plis en cas du stratifié.

Les actionneurs sont soumis à des tensions $U_1 = -U_2 = 30V$, alors (12) donne :
 $(M_x)_{pe} = (M_y)_{pe} = 0.53 \text{ Nm/m}$.

Zone 1 (plaque seule) :

La matrice de rigidité **[A]** en N/m :

$$[A] = \begin{bmatrix} 40129814.2 & 3182575.2 & 0 \\ 3182575.2 & 8965000.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3057600 \end{bmatrix}$$

La matrice de couplage **[B]** est nulle à cause de la symétrie.

La matrice de rigidité en flexion **[D]** en N·m :

$$[D] = \begin{bmatrix} 8.1383 & 0.6454 & 0 \\ 0.6454 & 1.8181 & 0 \\ 0 & 0 & 0.62 \end{bmatrix}$$

Zone 2 (plaque + actionneur) :

La matrice de rigidité **[A]** en N/m :

$$[A] = \begin{bmatrix} 85376604.7 & 22660858.4 & 0 \\ 22660858.4 & 74988333.5 & 0 \\ 0 & 0 & 26187200 \end{bmatrix}$$

La matrice de couplage **[B]** est nulle à cause de la symétrie.

La matrice de rigidité en flexion **[D]** en N·m :

$$[D] = \begin{bmatrix} 16.0399 & 4.0469 & 0 \\ 4.0469 & 13.3479 & 0 \\ 0 & 0 & 4.6593 \end{bmatrix}$$

La modélisation effectuée sur le ROBOT donne un déplacement vertical à la périphérie des actionneurs qui vaut : $w = -1.75 \mu\text{m}$.

ETUDE DE COMPOSITES ACTIFS STRATIFIES (DISCUSSION)

Comme précédemment, on va discuter plusieurs cas pour illustrer le comportement de la plaque avec le changement de tels paramètres.

On effectue sur le ROBOT différents calculs correspondants aux différents cas des tensions sur les actionneurs : $\pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 30$ Volts et des différentes orientations des plis dans les deux zones.

Cas	Zone 1	Zone 2
0°	[0° ₁₂]	[0°/actionneur/0°] _s
2, 30°	[0° ₅ / 30°] _s	[0°/actionneur/30°] _s
4, 30°	[0° ₄ / 30° ₂] _s	[0°/actionneur/30°] _s
6, 30°	[0° ₃ / 30° ₃] _s	[0°/actionneur/30°] _s
8, 30°	[0° ₂ / 30° ₄] _s	[0°/actionneur/30°] _s
10, 30°	[0° / 30° ₅] _s	[0°/actionneur/30°] _s
2, 45°	[0° ₅ / 45°] _s	[0°/actionneur/45°] _s
4, 45°	[0° ₄ / 45° ₂] _s	[0°/actionneur/45°] _s
6, 45°	[0° ₃ / 45° ₃] _s	[0°/actionneur/45°] _s
8, 45°	[0° ₂ / 45° ₄] _s	[0°/actionneur/45°] _s
10, 45°	[0° / 45° ₅] _s	[0°/actionneur/45°] _s
2, 60°	[0° ₅ / 60°] _s	[0°/actionneur/60°] _s
4, 60°	[0° ₄ / 60° ₂] _s	[0°/actionneur/60°] _s
6, 60°	[0° ₃ / 60° ₃] _s	[0°/actionneur/60°] _s
8, 60°	[0° ₂ / 60° ₄] _s	[0°/actionneur/60°] _s
10, 60°	[0° / 60° ₅] _s	[0°/actionneur/60°] _s
2, 90°	[0° ₅ / 90°] _s	[0°/actionneur/90°] _s
4, 90°	[0° ₄ / 90° ₂] _s	[0°/actionneur/90°] _s
6, 90°	[0° ₃ / 90° ₃] _s	[0°/actionneur/90°] _s
8, 90°	[0° ₂ / 90° ₄] _s	[0°/actionneur/90°] _s
10, 90°	[0° / 90° ₅] _s	[0°/actionneur/90°] _s

TABLEAU 2

Variation de w [µm] sur la Périphérie de la Plaque pour de Différentes Tensions et Types d'Orientations

		Tension [V]			
		5	10	20	30
Type d'orientation	0°	6.52	12.33	26.11	38.44
	2, 30°	6.53	12.33	26.12	38.46
	4, 30°	6.52	12.31	26.07	38.39
	6, 30°	6.48	12.24	25.92	38.17
	8, 30°	6.39	12.06	25.54	37.60
	10, 30°	6.12	11.56	24.49	36.05
	2, 45°	6.53	12.34	26.14	38.59
	4, 45°	6.53	12.33	26.11	38.45
	6, 45°	6.5	12.28	26.01	38.29
	8, 45°	6.4	12.09	25.60	37.69
	10, 45°	5.96	11.27	23.86	35.13
	2, 60°	6.54	12.36	26.17	38.53
	4, 60°	6.56	12.39	26.24	38.63
	6, 60°	6.61	12.46	26.39	38.85
	8, 60°	6.64	12.55	26.58	39.13
	10, 60°	6.53	12.34	26.13	38.47
	2, 90°	6.55	12.38	26.22	38.60
	4, 90°	6.61	12.48	26.43	38.91
	6, 90°	6.75	12.74	26.98	39.73
	8, 90°	7.01	13.22	27.99	41.20
10, 90°	7.37	13.93	29.5	43.43	

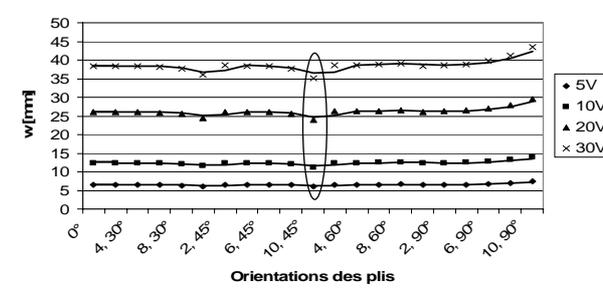


Figure 15. Variation de w avec les types d'orientations proposées pour des différentes tensions électriques.

On peut conclure qu'on a un déplacement w minimal dans le cas des 10 plis orientés à 45° , ceci explique la double résistance aux moments M_x et M_y .

Au dessous de 5V, l'influence des orientations des plis a un faible effet.

CONCLUSION

Les résultats s'obtenus par les différentes méthodes sont très proches entre eux et aussi avec ceux obtenus par ROBOT. Dans tous les cas, l'écart est inférieur à 10%.

Une fois la méthode de calcul est vérifiée, on a étudié l'influence de plusieurs paramètres sur le comportement en flexion des plaques comme : pourcentage de fibre, l'épaisseur de la plaque, l'orientation et la disposition des plis dans les plaques, et la tension appliquée. Pour les matériaux isotropes, comme prévu, la flèche diminue quand l'épaisseur de la plaque augmente. Dans le cas de stratifiés, des plis à $+45^\circ$ donnent une flèche inférieure que ceux orientés à 0° . Dans tous les cas de calcul, on a utilisé des modules équivalents tenant compte des contraintes mécaniques du composite et des actionneurs. Par ailleurs, on a trouvé que la disposition localisée d'un actionneur dans une plaque ou son équivalent réparti sur toute la plaque donne les mêmes résultats, ce qui facilite bien la résolution des équations de comportement.

REFERENCES

- Banks, H.T., Smith, R.C., Wang, Y. 1996. *Smart material structures. Modeling, estimation and control*. Masson.
- Berthelot, J.-M. 1999. *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures*. Tec&Doc Lavoisier.
- Cen, S., Soh, A.-K., Long, Y.-Q., Yao, Z.-H. 2002. A new 4-nodes quadrilateral FE model with variable electrical degrees of freedom for the analysis of piezoelectric laminated composite plates. Elsevier, *Composite Structures*, 58: 583-599.

- Chandra, R., Chopra, I. 1993. Structural modeling of composite beams with induced-strain actuators. *AIAA Journal*, 31(9): 1692-1701.
- Decolon, C. 2000, *Analysis of Composite Structures*. Taylor & Francis.
- Desai, Y.M., Ramtekkar, G.S., Shah, A.H. 2003. Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model. Elsevier, *Composite Structures*, 59: 237-249.
- Ganesan, N., Kadoli, R. 2003. Buckling and dynamic analysis of piezothermoelastic composite cylindrical shell. Elsevier, *Composite structures*, 59: 45-60.
- Ha, S.K., Keilers, C., Chang, F.-K. 1992. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators. *AIAA Journal*, 30(3): 772-780.
- Yan, Y.J., Yam, L.H. 2003. Mechanical interaction issues in piezoelectric composite structures. Elsevier, *Composite Structures*, 59 : 61-65.