

# MODELISATION THEORIQUE ET NUMERIQUE DES PROBLEMES D'ÉCOULEMENT DES FLUIDES NON NEWTONIENS EN CONDUITES DEFORMABLES

Mohammed Taibi, Amale Lahlou<sup>1</sup>, Kamal Gueraoui, Mohamed Kerroum et Gamal Zeggwagh

Groupe de Mécanique des Fluides et des Structures, Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences, B.P. 1014, Rabat, Maroc

<sup>1</sup> Filière des Sciences Économiques et de Gestion, Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales, Agdal-Rabat, Maroc  
med\_tai2006@hotmail.com

(Received 25 June 2007 - Accepted 30 May 2008)

## RESUME

*Le présent travail consiste en la modélisation numérique d'écoulement du sang considéré comme un fluide à deux phases (fluide newtonien-fluide de Casson généralisé) en régime pulsé, dans une conduite déformable. Une telle modélisation tient compte, en plus du caractère non newtonien du fluide, du déplacement axial et radial de la paroi, de sa porosité et de l'anisotropie. En utilisant une méthode numérique aux différences finies implicites pour résoudre les systèmes des équations locales, intégrales et le système des équations de la paroi, les quantités locales et globales de l'écoulement ont été déterminées. Cette étude dont l'objet est d'apporter une meilleure connaissance de certains aspects d'écoulements sanguins, peut aussi s'appliquer à des écoulements de type industriel.*

**Mots clés:** écoulement pulsé, fluides à deux phases, Casson généralisé, parois anisotropes, microcirculation

## ABSTRACT

*The objective of the present work is a numerical simulation of blood flow considered with a two-fluid model (Newtonian fluid-Casson generalized fluid) through deformable tubes. The porosity, anisotropy, axial and radial displacement of the pipe are considered. Using an implicit finite differences method to solve the equations systems local, integral and the duct, the global and the local quantities for the flow were determined. This study considered as a step in the modelling of flow in blood vessels, may also contribute to other important fields such as water desalination or gel filtration.*

**Keywords:** pulsatile flow, two phase fluids, generalized Casson fluid, anisotropic pipe, microcirculation

Liste des symboles:

$W^n$  : Composante axiale de la vitesse dans le noyau  
 $U^n$  : Composante radiale de la vitesse dans le noyau  
 $W^p$  : Composante axiale de la vitesse dans le plasma  
 $U^p$  : Composante radiale de la vitesse dans le plasma  
 $\rho$  : Masse volumique du fluide

$\rho_p$  : Masse volumique de la paroi

K : Consistance du fluide

m : Indice de comportement du fluide

$\eta_\infty$  : Viscosité du fluide pour des taux de cisaillements infinis

$\tau_0$  : Seuil de plasticité

$\tau_p$  : Contrainte de cisaillement pariétale

A : Déplacement axial de la paroi

B : Déplacement radial de la paroi

$R_0$  : Rayon de la conduite au repos

L : Longueur de la conduite

R : Rayon moyen de la conduite

$R_1$  : Rayon moyen du noyau

h : Epaisseur de la paroi

$E_\theta$  : Module d'Young dans la direction azimutale

$E_z$  : Module d'Young dans la direction longitudinale

$\nu$  : Coefficient de Poisson

r : Variable radiale

z : Variable axiale

$\omega$  : Pulsation du mouvement

t : Variable du temps

$W_0$  : Vitesse de l'écoulement permanent dans la direction axiale

P : Pression à l'intérieur de la conduite

$P_{ext}$  : Pression à l'extérieur de la conduite

$\beta$  : Nombre de Womersley

$Re$  : Nombre de Reynolds

$\mathcal{E}$  : Petits paramètres géométriques

q : Vitesse de débit

$q_f$  : Débit de fuite latérale

$\eta_a$  : Viscosité apparente du fluide

$\sigma_{\zeta\zeta}$  : Composante radiale de la contrainte

$\sigma_{zz}$  : Composante axiale de la contrainte

$\sigma_{\theta\theta}$  : Composante azimutale de la contrainte

$\sigma_{z\zeta}$  : Composante transversale de la contrainte

$\vec{\zeta}$  : Vecteur déplacement d'un élément de la paroi

$L_p$  : Coefficient de filtration

$d$  : Tenseur des taux de déformation

$\alpha_0$  : Rapport entre le rayon du noyau et le rayon de la conduite

## INTRODUCTION

L'étude des écoulements sanguins s'avère très délicate par le fait qu'elle fait intervenir un grand nombre de paramètres de natures diverses tels que des paramètres physiologiques, physico-chimiques ou mécaniques.

D'un point de vue hydrodynamique, l'étude de tels phénomènes pose un certain nombre de problèmes spécifiques liés principalement :

à la rhéologie de la suspension sanguine et à la déformabilité du globule rouge (Ostwald, Bingham, Bingham généralisé, Quemada, Sisko, Casson ou Casson généralisé) (Baranger *et al.*, 1990; Taibi *et al.*, 2002; Chammami *et al.*, 2001; Quemada, 1978; Rakotomalala, 1989; Senouillet *et al.*, 2005a) ;

aux caractéristiques (mécaniques, structurales, géométriques) du contenant (Amar *et al.*, 1998; Bahrar, 1986; Flaud, 1979; Kerroum, 1994 ; Buthaud, 1977 ; Gueraoui *et al.*, 1998; Zeggwagh, 1988 ; Senouillet *et al.*, 2005b) ;

aux régimes d'écoulements : pulsés, transitoires, intermittents, quelquefois instables voire turbulents (Bahrar, 1986; Gueraoui *et al.*, 1998 ; Fullana *et al.*, 2007) ;

à l'aspect multiphasique de l'écoulement (Kerroum, 1994).

Les différents aspects de ces problèmes se retrouvent à des degrés divers dans trois principaux domaines d'hydrodynamique sanguine : grande circulation, la microcirculation et la circulation capillaire. C'est la taille du globule rouge par rapport à la taille des vaisseaux qui permet la distinction entre ces trois domaines.

L'objectif de notre travail est la modélisation des écoulements sanguins grâce à l'étude d'écoulements non permanents d'un fluide à deux phases (fluide de Casson généralisé-fluide newtonien) en conduites déformables, poreuses, à parois élastiques et anisotropes. Cette approche, qui ne concerne que la modélisation d'écoulements sanguins au niveau de la grande et de la petite circulation, s'effectue par voie théorique et numérique.

Les phénomènes, écoulement du fluide et de déformation de la paroi, que nous avons analysés sont relatifs à des régimes périodiques, les développements numériques permettent d'étudier l'effet des paramètres rhéologiques de la paroi sur l'ensemble de l'écoulement. Afin d'illustrer ces effets nous avons présenté, à titre d'exemple, l'évolution des profils de la pression et du débit.

**MODELE THEORIQUE**

**Mise en équations de la conduite**

La conduite considérée est un tube axisymétrique souple, de longueur L à l'état déformé et L<sub>0</sub> à l'état initial, à paroi mince et poreuse, d'axe de révolution  $O\vec{z}$ , de masse volumique  $\rho_p$ , d'épaisseur h, de rayon au repos R<sub>0</sub> et de rayon non permanent R (z, t). Les déplacements axial et radial de la paroi sont respectivement A (z, t) et B (z, t).

Le système d'équations décrivant la déformation de la paroi de la conduite en l'absence d'efforts volumiques (effet d'inertie négligeable devant l'effet de viscosité) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{\zeta\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{z\zeta}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_{\theta\theta}}{\zeta + R} = \rho_p \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{z\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_{z\zeta}}{\zeta + R} = \rho_p \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

(1)

Où  $\vec{\zeta} = B(z,t) \vec{e}_r + A(z,t) \vec{e}_z$ , est le vecteur déplacement d'un élément de la paroi dans un repère local.

En multipliant les deux équations du système (1) par  $\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)$  et en les intégrant de  $\frac{-h}{2}$  à  $\frac{h}{2}$  tout en tenant compte des conditions aux limites correspondantes à la surface de séparation fluide-paroi (Flaud *et al.*, 1974), on obtient :

$$\left[ \frac{\zeta + R}{R} \sigma_{\zeta\zeta} \right]_{\zeta = \frac{-h}{2}}^{\zeta = \frac{h}{2}} = \left( P_t - 2\eta_p \frac{\partial U^P}{\partial r} \right)_{r=R}$$

$$\left[ \frac{\zeta}{R} \sigma_{z\zeta} \right]_{\zeta = \frac{-h}{2}}^{\zeta = \frac{h}{2}} = \left( -\eta_p \left( \frac{\partial W^P}{\partial r} + \frac{\partial U^P}{\partial z} \right) \right)_{r=R}$$

(2)

Avec :

$$P_t = P - P_{\text{ext}} \quad (3)$$

Où : P et P<sub>ext</sub> (P<sub>ext</sub> est supposée constante) sont respectivement les pressions à l'intérieur et à l'extérieur du tube, U<sup>p</sup> et W<sup>p</sup> respectivement les vitesses radiale et axiale dans le manchon plasmatique et η<sub>p</sub> la viscosité apparente du fluide représentant le manchon plastique, le système d'équations (1) devient alors :

$$\rho_p h \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \left( P_t - 2\eta_p \frac{\partial U^p}{\partial r} \right)_{r=R} + \frac{hE}{1+\nu} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{h}{1-\nu} \left( \frac{\nu E}{3R} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{BE}{R^2} \theta \left( 1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) \right) \quad (4)$$

$$\rho_p h \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \left( -\eta_p \left( \frac{\partial W^p}{\partial r} + \frac{\partial U^p}{\partial z} \right) \right)_{r=R} + \frac{hE}{1-\nu} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\nu}{12R^4} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{h^3 BE}{1-\nu} \theta + \left( \frac{h\nu E}{1-\nu} \frac{\theta}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{B}{R} \right) \right)$$

En posant les changements de variables suivants :

$$\hat{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \hat{z} = \frac{z}{L_0}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{W} = \frac{W}{W_0}, \quad \hat{U} = \frac{UL_0}{W_0 R_0}, \quad \hat{\eta}_a = \frac{\eta_a}{\eta_p}, \quad \hat{P}_t = \frac{P_t R_0^2}{\eta_p W_0 L_0}, \quad \hat{B} = \frac{B}{h} \quad (5)$$

$$\hat{A} = \frac{A}{L_0}, \quad \hat{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \varepsilon = \frac{R_0}{L_0}, \quad \alpha = \frac{h}{R_0}, \quad \hat{E}_z = \frac{E}{E_0}, \quad \hat{E}_\theta = \frac{E}{E_0}$$

Le système de la paroi sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$\alpha \varepsilon^3 X_3 \frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial \hat{z}^2} = \frac{X_1 X_2}{X_4} \hat{P}_t + 2\varepsilon X_2^2 \left( \frac{-\alpha}{1-\nu} \frac{\hat{B} \hat{E}_\theta}{\theta} - \frac{-\nu}{1-\nu} \frac{\hat{E}_z}{3} \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{z}} \right) \quad (6)$$

$$\varepsilon X_3 \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial \hat{z}^2} = \frac{-X_1 X_2}{X_4} \left( \frac{\partial \hat{W}^p}{\partial \hat{x}} \right)_{\hat{x}=1} + \frac{\alpha X_1 X_2 \hat{B}}{X_4} \left( \frac{\partial \hat{W}^p}{\partial \hat{x}} \right)_{\hat{x}=1} + \frac{2\varepsilon X_2^2}{1-\nu} \left( \alpha \nu \frac{\hat{E}_\theta}{3} \frac{\partial \hat{B}}{\partial \hat{z}} + \hat{E}_z \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial \hat{z}^2} \right)$$

Avec :

$$X_1 = \frac{T}{T_c} \quad \text{où} \quad T_c = \frac{L_0}{W_0} \quad \text{le temps de convection dans la direction axiale}$$

$$X_2 = \frac{T}{T_e} \quad \text{où} \quad T_e = \frac{L_0}{C_0} \quad \text{le temps caractéristique lié à l'élasticité de la paroi}$$

$$X_3 = \frac{\rho_p h}{\rho R_0} \quad \text{le rapport des masses fluides – paroi}$$

$$X_4 = \frac{C_0}{C_v} \quad \text{où} \quad C_0 = \sqrt{\frac{hE_0}{2\rho R_0}} \quad \text{la vitesse de Moens-Korteweg}$$

$$C_v = \frac{\eta}{\rho R_0} \quad \text{la vitesse de propagation du cisaillement}$$

Où :  $E_0$  est le module d'Young effectif (peut être estimé à partir d'un modèle entièrement simplifié conduisant à la formule de Moens-Korteweg),  $W_0$  une vitesse caractéristique dans la direction axiale (vitesse moyenne dans un écoulement de Poiseuille).

### Mise en équations du mouvement de fluide

L'écoulement diphasique, de vitesse axiale  $W(r, z, t)$  et radiale  $U(r, z, t)$  en chaque point  $M(r, z)$ , comprend :

- Un noyau central de rayon  $R_1$ , riche en globules rouges, modélisé par un fluide de viscosité dynamique  $\eta_a$ , obéissant à la loi de Casson généralisé.
- Un manchon plasmatique entourant le noyau, pauvre en globules rouges, modélisé par un fluide newtonien (Chien *et al.*, 1966) de viscosité dynamique  $\eta_p$ .

Les deux fluides sont supposés incompressibles et ont la même masse volumique  $\rho$  afin de négliger les effets de sédimentations gravitationnelles qui tendent à décentrer l'axe du noyau vers le bas (Bitoun, 1985).

Les équations adimensionnelles traduisant la conservation de la quantité de mouvement et de masse s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 R_e \varepsilon^3 \left( \frac{\beta^2}{R_e \varepsilon} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{r}} + \hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{r}} + \hat{W} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} \right) - \frac{\hat{\mathcal{P}}}{\hat{r}} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{z} \partial \hat{r}} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \hat{r} \hat{\eta}_a \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{r}} \right) \right. \\
 \left. - 2 \hat{\eta}_a \frac{\hat{U}}{\hat{r}^2} + \varepsilon^2 \left( \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{z}^2} + \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} \right) \right) \\
 R_e \varepsilon \left( \frac{\beta^2}{R_e \varepsilon} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{r}} + \hat{U} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{r}} + \hat{W} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{z}} \right) - \frac{\hat{\mathcal{P}}}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{r}^2} \\
 + \varepsilon^2 \left( \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{r} \partial \hat{z}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{r}} + 2 \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left( \hat{\eta}_a \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{r}} \right) \right) \\
 \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{U}) + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{z}} = 0 \tag{7}
 \end{aligned}$$

Il s'introduit les nombres sans dimensions suivants:

$$\beta = R_0 \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\pi \eta_p}}, \quad R_e = \frac{\rho R_0 W_0}{\eta_p} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{R_0}{L_0}$$

qui sont respectivement le nombre de Womersley généralisé mesurant l'importance relative des effets d'inertie par rapport aux effets de viscosité, le nombre de Reynolds généralisé de l'écoulement mesurant l'importance relative des effets d'inertie par rapport aux effets de viscosité et  $\varepsilon$  un petit paramètre géométrique.

Par la suite, on omet les (^.) et on attribue l'exposant « n » au fluide qui occupe le noyau et l'exposant « p » pour le manchon plasmatique. Le système d'équations (7) devient, compte tenu des hypothèses simplificatrices ; ( $\varepsilon^2 \ll 1$  et  $R_e \varepsilon \ll 1$ ), (Buthaud, 1977) :

pour le noyau :  $0 \leq r \leq R_1$

$$\beta^2 \frac{\partial W^n}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta_a \frac{\partial W^n}{\partial r} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W^n}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U^n) = 0 \quad (8)$$

Pour le plasma :  $R_1 \leq r \leq R$

$$\beta^2 \frac{\partial W^P}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial W^P}{\partial r} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W^P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U^P) = 0 \quad (9)$$

Le noyau central est modélisé par un fluide de Casson généralisé dont la loi de viscosité sous forme adimensionnelle est donnée par (Hadjsadok *et al.*, 1993) :

$$\eta_a \frac{\partial W^n}{\partial r} = -\tau_0 + \eta_\infty \frac{\partial W^n}{\partial r} + k \left| \frac{\partial W^n}{\partial r} \right|^{m-1} \frac{\partial W^n}{\partial r} \quad \text{pour } \tau > \tau_0$$

$$\frac{\partial W^n}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } \tau \leq \tau_0$$

Cette loi est paramétrée par  $\tau_0$ ,  $\eta_\infty$ ,  $k$ ,  $m$  et  $\tau$  qui sont respectivement la contrainte seuil, la viscosité pour des taux de cisaillements très grands, la consistance, l'indice du comportement du fluide et la contrainte de cisaillement. La loi de Casson généralisé est vérifiée expérimentalement et représente bien le comportement non newtonien de la suspension sanguine.

En vue de fixer les frontières du domaine de l'écoulement et de définir des pas constants, indépendants du temps, dans la direction radiale de la section S considérée, on effectue le changement de variable suivant :

$$x = \frac{r}{R(z,t)} \quad \text{où : } 0 \leq x \leq 1 \quad (10)$$

tel que ( $r = R$ ,  $x = 1$ ) à la paroi, ( $r = R_1$ ,  $x = \alpha_0$ ) à l'interface et ( $r = 0$ ,  $x = 0$ ) sur l'axe.

Le système des équations locales s'écrit alors :

pour le noyau :  $0 \leq r \leq \alpha_0$

$$\beta^2 \frac{\partial W^n}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{xR^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x\eta_a \frac{\partial W^n}{\partial x} \right) + \beta^2 \frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial W^n}{\partial x} \tag{11}$$

$$\frac{\partial W^n}{\partial z} + \frac{1}{xR} \frac{\partial}{\partial x} \left( xU^n \right) - \frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial W^n}{\partial x} = 0$$

Pour le plasma :  $\alpha_0 \leq x \leq 1$

$$\beta^2 \frac{\partial W^p}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{xR^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial W^p}{\partial x} \right) + \beta^2 \frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial W^p}{\partial x} \tag{12}$$

$$\frac{\partial W^p}{\partial z} + \frac{1}{xR} \frac{\partial}{\partial x} \left( xU^p \right) - \frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial W^p}{\partial x} = 0$$

Pour la loi du fluide central :

$$\eta_a \frac{\partial W^n}{\partial x} = -\tau_0 R + \eta_\infty \frac{\partial W^n}{\partial x} + k \left| \frac{\partial W^n}{\partial x} \right|^{m-1} \frac{\partial W^n}{\partial x} \quad \text{pour } \tau > \tau_0$$

$$\frac{\partial W^n}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } \tau \leq \tau_0$$

### CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites sont celles traduisant l'adhérence des particules fluides à la paroi, l'axisymétrie de l'écoulement et la continuité des champs de vitesse et des contraintes à l'interface entre les deux fluides.

En effet :

*l'axisymétrie de l'écoulement* : impose deux conditions homogènes sur l'axe (x=0) du conduit

$$\frac{\partial W^n}{\partial x} = 0 \quad \text{et } U^n = 0 \tag{13}$$

*l'adhérence à la paroi(x=1)* : se traduit dans le cas où  $\varepsilon^2 \ll 1$  et pour une conduite à paroi mince, poreuse et anisotrope par:

$$W^p = \frac{\beta^2}{R_e \varepsilon} \frac{\partial A}{\partial t} - L_p (P - P_{ext}) \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{et} \quad U^p = \frac{\beta^2 \alpha}{R_e \varepsilon} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{L}{\varepsilon^2} (P - P_{ext}) \quad (14)$$

Où :  $L_p$  est le coefficient de filtration

la continuité du champ de vitesses et des contraintes tangentielles en ( $x = \alpha_0$ ) : se traduit par :

contraintes tangentielles :

$$\eta_a \frac{\partial W^n}{\partial x} = \frac{\partial W^p}{\partial x} \quad (15)$$

continuité du champ de vitesses :

$$W^n = W^p \quad \text{et} \quad U^n = U^p \quad (16)$$

### SYSTEME DES EQUATIONS INTEGRALES

Le gradient de pression étant inconnu le long du conduit, le système des équations locales ne peut être résolu séparément. Pour cela, on lui adjoint le système des équations intégrales de l'écoulement qu'on obtient en intégrant les équations locales (11) et (12) chacune sur son domaine correspondant, le long d'une section, en utilisant les conditions aux limites et en sommant les équations de même nature. On obtient le système intégral suivant :

$$\beta^2 \frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2\beta^2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} Q + \frac{2}{R} \tau_p + \frac{2\beta^4}{R_e \varepsilon R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{2\beta^2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial z} L_p (P - P_{ext})$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{2\beta^2 \alpha}{R_e \varepsilon R} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} Q - \frac{2\beta^2}{R_e \varepsilon R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2L}{R \varepsilon^2} (P - P_{ext})$$

Où : Q est le débit global instantané à travers la section du conduit considéré, et

$$\tau_p = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial W^p}{\partial x} \right)_{x=1} \quad \text{la contrainte de cisaillement pariétale.}$$

À ce système, on adjoint les conditions aux limites adimensionnelles suivantes :

La pression à l'entrée de la conduite :  $P(z = 0, t) = P_1 + P_2 \cos \omega t$

La pression à la sortie de la conduite :  $P(z = 1, t) = P_3 + P_4 \cos \omega t$

Où :  $P_1$  et  $P_3$  sont les composantes permanentes de la pression ;  $P_2$  et  $P_4$  les composantes oscillatoires de la pression et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  la pulsation du phénomène.

### MÉTHODE ET PROCESSUS DE RÉOLUTION

Les systèmes d'équations (6), (11), (12) et (17) sont résolus à l'aide d'une méthode numérique itérative aux différences finies de type implicite (Nougier, 1989). Les calculs sont amorcés avec la valeur de la contrainte pariétale  $\tau_p$  issue du profil initial, qui peut être absolument quelconque pourvu qu'il satisfasse aux conditions aux limites. On adopte, pour cela, un profil correspondant à un écoulement permanent à deux phases (newtonien-newtonien) en conduites cylindriques poreuses. La résolution du système de la paroi permet la détermination des déplacements axial et radial de la paroi. En suite, le système des équations intégrales permet, à chaque instant, le calcul de la pression, du gradient de pression et de débit. La résolution du système des équations locales fournit les profils des vitesses à chaque instant et à partir desquelles, la grandeur  $\tau_p$  est réestimée, sa valeur corrigée permet de réitérer et ce jusqu'à convergence. Les critères de convergence et de périodicité portent sur la pression et les pas de discrétisation de l'espace du temps valent respectivement  $\Delta z = 5.10^{-2}$  et  $\Delta t = 1.10^{-2}$ .

### RÉSULTATS ET DISCUSSION

Les données prises de la littérature (Hadjsadok, 1993 ; Gueraoui, 19981 ; Zeggwagh, 1988) sont les données relatives aux conditions hydrodynamiques et aux valeurs des paramètres rhéologiques du fluide et de la conduite. Elles sont exprimées dans le système C.G.S., qui est le plus approprié au réseau cardio-vasculaire.

L'influence de la viscosité infinie  $\eta_\infty$  sur la pression et le débit est portée sur les Figures 1 et 2. On a examiné le cas  $\eta_\infty = 0.01$  et le cas  $\eta_\infty = 0$ , qui correspondent à un fluide de Casson généralisé pour le premier et à un fluide de Bingham généralisé pour le second. Comme on pouvait s'y attendre, on observe une augmentation des valeurs de la pression (Figure 1) et une diminution des valeurs de débit (Figure 2). Ceci est dû à l'accroissement du frottement interne entre les diverses couches coaxiales du fluide. On obtient des résultats qualitativement semblables à ceux obtenus par d'autres auteurs (Rockwell, 1969 ; Rakotomalala, 1989).

L'influence de l'anisotropie de la paroi sur la pression et le débit est portée sur les Figures 3 et 4. L'anisotropie peut être prise en compte par la considération d'un module d'Young plus petit dans la direction azimutale que dans la direction axiale. Ceci se traduit, pour cette dernière, par une diminution de l'élasticité, donc une faible déformabilité, et par conséquent, une augmentation des valeurs de la pression et de débit.

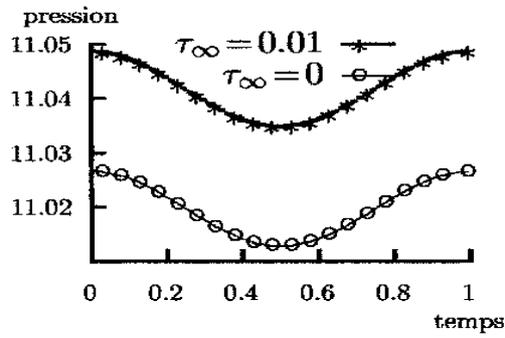


Figure 1. Évolution temporelle de la pression au cours d'une période en  $z=L/2$  pour deux valeurs de  $\eta_{\infty}$ .

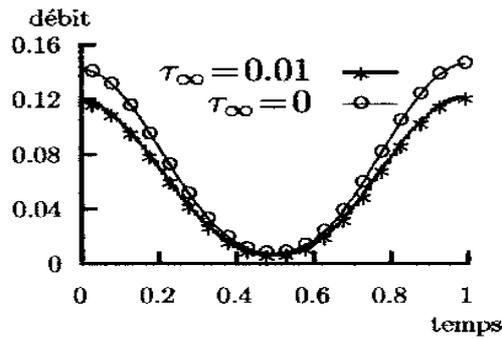


Figure 2. Évolution temporelle du débit au cours d'une période en  $z=L/2$  pour deux valeurs de  $\eta_{\infty}$ .

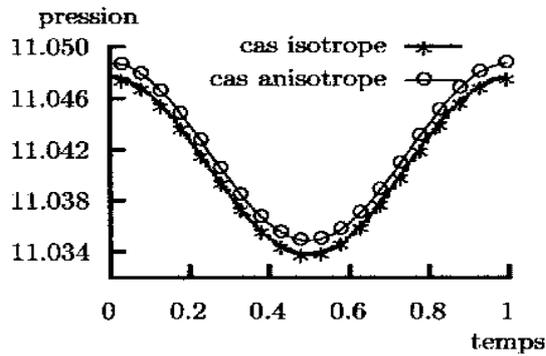


Figure 3. Évolution temporelle de la pression au cours d'une période en  $z=L/2$  pour les cas d'une paroi anisotrope et isotrope.

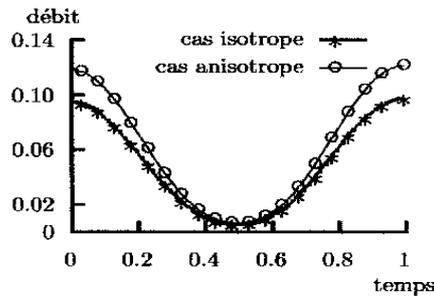


Figure 4. Évolution temporelle du débit au cours d'une période en  $z=L/2$  pour les cas d'une paroi anisotrope et isotrope.

Sur les Figures 5 et 6, on a porté l'évolution des profils de la pression et du débit pour deux valeurs différentes du coefficient de filtration  $L_p=4.2 \cdot 10^{-3}$  et  $L_p=4.2 \cdot 10^{-4}$ . On constate qu'une diminution de  $L_p$  provoque une augmentation des valeurs de la pression et de débit. On a obtenu des résultats similaires à ceux obtenus par différents auteurs (Chammami *et al.*, 2001; El Hammoumi, 1995 ; Zeggwagh, 1988).

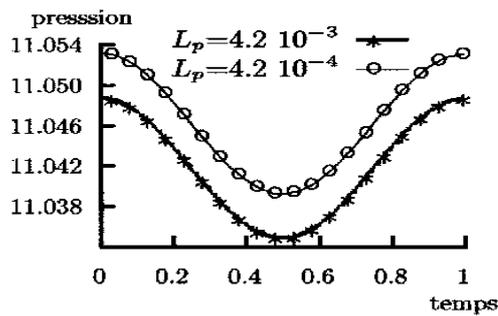


Figure 5. Évolution temporelle de la pression au cours d'une période en  $z=L/2$  pour deux valeurs du coefficient de filtration  $L_p$ .

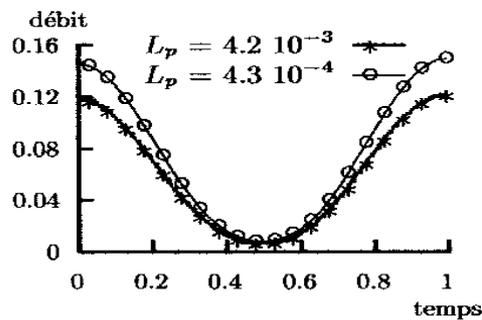


Figure 6. Évolution temporelle du débit au cours d'une période en  $z=L/2$  pour deux valeurs du coefficient de filtration  $L_p$ .

## CONCLUSION

Cette étude nous a permis, d'une part, la mise au point d'un modèle numérique pour résoudre les équations qui régissent l'écoulement en conduites déformables à parois élastiques, anisotropes et poreuses et d'autre part, l'analyse de l'influence des paramètres liés à la nature du fluide ainsi que ceux caractérisant la nature et la géométrie de la paroi du conduit.

Les résultats obtenus montrent l'importance qu'il y a à tenir compte de la nature de la paroi artérielle et de la nature du fluide. Ces résultats devraient contribuer à une meilleure connaissance des processus intervenant dans la circulation sanguine et, par conséquent, à des applications faites en hémodynamique.

## REFERENCES

- Amar, H., Kerroum, M. & Zeggwagh, G. 1998. *Modélisation de la contrainte pariétale pour un écoulement pulsé de fluide diphasique en conduite déformable de faible diamètre*. C. R. Acad. Sci., t. 326, série II, Paris, pp. 197-204.
- Bahrar, B. 1986. *Influence, sur les écoulements transitoires en conduite, des termes d'inertie de la paroi ainsi que des déformations de flexion et de cisaillement*. Thèse de doctorat de 3<sup>ème</sup> cycle, I.N.S.A., Lyon.
- Baranger, J. et Najib, K. 1990. Analyse numérique des écoulements quasi-newtonien dont la viscosité obéit à la loi de puissance ou la loi de carreau. *Num. Math.*, 58: 34-49.
- Bitoun, J.P. 1985. *Études théoriques et expérimentales de la microcirculation sanguine au passage d'une sténose*. Thèse de doctorat de l' I.N.P., Toulouse.
- Buthaud, H. 1977. *Analyse non linéaire et bidimensionnelle de l'écoulement sanguin dans un modèle de l'aorte*. Thèse de docteur ingénieur, Poitiers.
- Chammami, R., Taibi, M., Hami, M., Amar, H., Kerroum, M., Gueraoui, K. et Zeggwagh, G. 2001. *Influence de la nature de la paroi sur un modèle d'écoulements pulsés de fluides diphasiques*. La Houille Blanche, T. 3/4, pp.18-24.
- Chien, S., Usami, S., Taylor, H., Lundberg, J.L. and Gregersen, M.I. 1966. Effects of hematocrit and plasma proteins on human blood rheology at low shear rates. *J. App. Physiol.*, 21: 81-87.
- El Hammoumi, A. 1995. *Résolution numérique d'écoulements pulsés de fluides non-newtoniens en conduites déformables poreuses*. Thèse de doctorat es-sciences, Rabat.
- Flaud, P. 1979. *Influence des propriétés non linéaires sur la dynamique des écoulements dans un tuyau déformable*. Thèse de doctorat es-sciences, Paris VII.
- Flaud, P., Geiger, D., Oddou, C. et Quemada, D. 1974. Écoulements pulsés dans les tuyaux viscoélastiques. Application à l'étude de la circulation sanguine. *J. Physique Appliquée*, tome 35, pp. 869-882.
- Fullana, J.-M., Dispot, N., Flaud, P., Rossi, M. 2007. An inverse method for non-invasive viscosity measurements. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, pp. 38- 79.
- Gueraoui, K., El Hammoumi, A. et Zeggwagh, G. 1998. *Écoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites déformables, poreuses et anisotropes*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, série II, pp. 825-832.
- Hadjsadok, A., Benhadid, S., Wang, X., Lucius, M. et Soltz, J.F. 1993. *Viscosimètre de Couette : détermination du taux de cisaillement à partir des modèles de Casson et*

- Casson généralisé*. 1<sup>er</sup> Congrès de mécanique, E.N.I.M., Rabat (Maroc), T2, pp. 309-317.
- Kerroum, M. 1994. *Écoulements pulsés de fluides diphasiques en conduites déformables de faible diamètres. Modélisation de la microcirculation sanguine*, Thèse de doctorat es-sciences, Rabat, Maroc.
- Nougier, J. P. 1989. *Méthodes de calcul numérique*. Masson, 3<sup>ème</sup> édition, Paris.
- Quemada, D. 1978. Rheology of concentrated disperse system, 3, General features of the proposed non newtonian model. Comparison with experimental data, *Rheol. Acta.*, 17 : 643-653.
- Rakotomalala, A.R. 1989. *Écoulements non-newtoniens en conduites rigides et déformables*. Thèse de doctorat es-sciences, I.N.P. Toulouse.
- Rockwell, R. L. 1969. *Non linear analysis of pressure and shock waves in blood vessels*. PhD dissertation, Stanford University.
- Senouillet, L., Dantan, Ph., Flaud, P., Guiffant, G. et Tsatsaris, V. 2005a. *Approche numérique des écoulements sanguins maternels dans le placenta humain : l'eau et le monde vivant = CFD approach for a better understanding of uteroplacental circulation*. Journées de l'Hydraulique, Paris, (10/2004) , N°4, Note(s): 4, pp. 60-65.
- Senouillet, L., Dantan, P., Flaud, P., Guiffant, G. 2005b. Approche numérique des écoulements sanguins maternels dans le placenta humain. *La Houille Blanche*, 4 : 60-65.
- Taibi, M., Kerroum, M., Gueraoui, K., Hammoumi, A. et Zeggwagh, G. 2002. Relation contrainte pariétale débit pour un écoulement pulsé à deux phases en conduites déformables, poreuses à parois élastiques et anisotropes. *Mécanique et Industrie*, tome3, pp.253-260.
- Zeggwagh, G. 1988. *Modélisation théorique et expérimentale de l'hémodynamique en microcirculation*. Thèse de doctorat es-sciences, I.N.P. Toulouse.