CLASSIFICATION DES SYSTÈMES TRIPLES DE LIE DE DIMENSION 3 SUR LE CORPS $\mathbb{C}$

M. Al-Houjairi et N. Farès[1]
Université Libanaise, Faculté de Génie-1, Tripoli, Liban
[1]Université Libanaise, Faculté des Sciences – III,
Département des Mathématiques, Tripoli, Liban
houjairi@hotmail.com

(Received 24 July 2000 Accepted 6 January 2003)

RÉSUMÉ

Le système triple de Lie représente l'analogue infinitésimal linéaire de l'espace symétrique. En d'autres termes l'étude locale des espaces symétriques est équivalente à celle des systèmes triples de Lie. L'actualité du problème de classification des systèmes triples de Lie revient à l'importance des espaces symétriques qui jouent un rôle considérable dans plusieurs domaines des sciences modernes comme la physique cosmologique, la mécanique théorique, la géométrie différentielle, la théorie des boucles continues et celle des groupes continus etc.

Notre article donne une classification complète des systèmes triples de Lie de dimension 3, sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Cette classification est basée sur :

1. *la résolution d'une certaine équation tensorielle non élémentaire.*
2. *la résolution du problème d'isomorphisme des systèmes algébriques obtenus.*

Nous avons trouvé 10 types et 4 familles monoparamétriques, à un isomorphisme près, de systèmes étudiés. La classification des systèmes obtenus est réalisée grâce à l'utilisation des identités que vérifient les constantes structurales de l'algèbre.

Mots clés: systèmes triples de Lie, algèbres de Lie, groupes de Lie, boucles analytiques, espaces homogènes, espaces symétriques, algèbres de Mal'sev, boucles analytiques de Moufang, algèbres binairement de Lie, algèbres diassociatives, algèbres de Bol, boucles analytiques de Bol, espaces à courbure constante

ABCTRACT

Lie's triple systems represent well the infinitesimal linear analogy of the symmetrical space. In other word, the local study of symmetrical spaces is equivalent to that of Lie's triple systems. The actuality of the classification problem of Lie's triple systems is warranted by the important role that symmetrical spaces play in several fields of modern sciences such as cosmological physics, theoretical mechanics, differential geometry, and the theory of continuous loops and groups…etc.

This paper presents a complete classification of Lie's triple systems of dimension 3, on the field of complex numbers C. *Such classification is based on:*

1- the resolution of a selected noa-elementary tensorial equation.

2- the resolution of the isomorphism problem of the resultant algebraic systems.

The study has resulted in obtaining ten types and four mono-parametric families - to the order of one isomorphism - of the studied systems. The classification of systems obtained is achieved by the utilization of identities that verifies the structural constants of algebra.

Keywords: Lie triple systems, Lie algebras, Lie groups, analytic loops, homogeneous spaces, symmetric spaces, Malcev algebras, analytic Moufang loops, binary Lie algebras, diassociative algebras, Bol algebras, analytic Bol loops, space of constant curvature

INTRODUCTION

Le système triple de Lie représente l'analogue infinitésimal linéaire de l'espace symétrique (Loos, 1969). En d'autres termes, l'étude locale des espaces symétriques est équivalente à celle des systèmes triples de Lie. L'actualité du problème de classification des systèmes triples de Lie découle de l'importance des espaces symétriques qui jouent un rôle considérable dans plusieurs domaines des sciences modernes comme la physique cosmologique (Weinberg, 1972), la mécanique théorique (Doubrovine *et al*., 1982), la géométrie différentielle (Cartan, 1926-27; Helgason, 1962), la théorie des boucles continues et celle des groupes continus *etc*.

Notre article donne une classification complète des systèmes triples de Lie de dimension 3, sur le corps des nombres complexes C (Cf. théorème 4 à la fin de l'article). La classification mentionnée est basée sur :

1- la résolution d'une certaine équation tensorielle non élémentaire.

2- la résolution du problème d'isomorphisme des systèmes algébriques obtenus.

Nous avons trouvé 10 types et 4 familles monoparamétriques, à un isomorphisme près, de systèmes étudiés. La classification des systèmes obtenus est réalisée grâce à l'utilisation des identités que vérifient les constantes structurales de l'algèbre.

Définition

L'espace vectoriel T, défini sur le corps commutatif k est dit système triple de Lie, si sur T est définie une opération ternaire interne trilinéaire :

$$(-, -, -) : T \times T \times T \rightarrow T$$
$$<x, y, z> \rightarrow (x, y, z),$$

qui satisfait aux axiomes suivants :

$$(x, y, z) = -(y, x, z) ;$$
$$(x, x, z) = \mathbf{0}$$
$$(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = \mathbf{0}$$
$$(x, y, (u, v, w)) = ((x, y, u), v, w) + (u, (x, y, v), w) + (u, v, (x, y, w)),$$

où $x, y, u, v, w \in T$ et $\mathbf{0}$ est l'élément nul de T.

(Si la caractéristique de k est différente de 2 (*Char* $k \neq 2$), alors les deux axiomes 1 et 2 sont équivalents)

Dans la suite on suppose que $k = C$.

Soit $(e_i)^n_{i=1}$ une base de *T,* et soient *x, y, z* des éléments de *T,* tels que

$$x = x^i e_i \quad , \qquad y = y^j e_j \quad , \qquad z = z^k e_k \, ;$$

(ici et dans la suite les indices répétés désignent des sommations).

Nous avons alors :

$$(x, y, z) = x^i y^j z^k (e_i , e_j , e_k) = x^i y^j z^k R^p_{i\,j\,k}\, e_p \; ,$$

où $R^p_{i\,j\,k}$ sont les constantes structurales de l'algèbre considérée.

Il est facile de vérifier que les constantes structurales vérifient les relations suivantes :

(1) $R^p_{i\,j\,k} = - R^p_{j\,i\,k}\,, \qquad R^p_{i\,i\,k} = 0,$

(2) $R^p_{i\,j\,k} + R^p_{k\,i\,j} + R^p_{j\,k\,i} = 0$

(3) $R^q_{k\,l\,m}\, R^p_{i\,j\,q} = R^q_{i\,j\,k}\, R^p_{q\,l\,m} + R^q_{i\,j\,l}\, R^p_{k\,q\,m} + R^q_{i\,j\,m}\, R^p_{k\,l\,q}$

Désignons par $R_{i\,j}$ la matrice, obtenue en fixant les indices *i* et *j* :

$$R_{i\,j} \overset{def}{=} (R^p_{i\,j\,k})_{\,k\,,\,p\,=\,1,\ldots n}\;,$$

où *p* est le numéro de la colonne et *k* celui de ligne.

La classification des systèmes triples de Lie signifie en quelque sens la résolution de l'équation tensorielle *(3)* où les constantes structurales $R^p_{ij\,k}$ vérifient les relations *(1)* et *(2).*

Proposition 1

Le sous espace vectoriel engendré par les matrices $R_{i\,j}$ $(i, j = 1, 2,\ldots,n)$ est stable pour l'opération de commutation des matrices et par suite c'est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de toutes les matrices carrées d'ordre *n* pour l'opération usuelle de commutation.

Démonstration

Le résultat découle de la relation

$$[R_{kl}\,,\, R_{ij}] = R_{kl}\, R_{ij} - R_{ij}\, R_{kl} = R^q_{ij\,k}\, R_{ql} + R^q_{ij\,l}\, R_{kq}\,, \qquad (*)$$

qui est une conséquence directe de la relation *(3).*

C.Q.F.D

Pour les systèmes triples de Lie de dimension 3 la classification consiste à calculer les trois matrices des constantes structurales R_{12} , R_{13} , R_{23} . En appliquant la relation (*) dans le cas $n = 3$, nous obtenons les relations suivantes :

1) $[R_{12}\,,\, R_{12}] = R^1_{121}\, R_{12} - R^3_{121}\, R_{23} + R^2_{122}\, R_{12} + R^3_{122}\, R_{13}$

2) $[R_{13}\,,\, R_{13}] = R^1_{131}\, R_{13} - R^2_{131}\, R_{23} + R^2_{133}\, R_{12} + R^3_{133}\, R_{13}$

3) $[R_{23}\,,\, R_{23}] = R^1_{232}\, R_{13} - R^2_{232}\, R_{23} - R^1_{233}\, R_{12} + R^3_{233}\, R_{13}$

4) $[R_{13}\,,\, R_{12}] = R^1_{121}\, R_{13} + R^2_{121}\, R_{23} + R^2_{123}\, R_{12} + R^3_{123}\, R_{13}$

$$\begin{array}{lll}
5) & [R_{23}, R_{12}] = R^1{}_{122} R_{13} + R^2{}_{122} R_{23} - R^1{}_{123} R_{12} + R^3{}_{123} R_{23} & (S1) \\
6) & [R_{12}, R_{13}] = R^1{}_{131} R_{12} - R^3{}_{131} R_{23} + R^2{}_{132} R_{12} + R^3{}_{132} R_{13} & \\
7) & [R_{23}, R_{13}] = R^1{}_{132} R_{13} + R^2{}_{132} R_{23} - R^1{}_{133} R_{12} + R^3{}_{133} R_{23} & \\
8) & [R_{12}, R_{23}] = R^1{}_{231} R_{12} - R^3{}_{231} R_{23} + R^2{}_{232} R_{12} + R^3{}_{232} R_{13} & \\
9) & [R_{13}, R_{23}] = R^1{}_{231} R_{13} + R^2{}_{231} R_{23} + R^2{}_{233} R_{12} + R^3{}_{233} R_{13}\ , &
\end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{lll}
1) & (R^1{}_{121} + R^2{}_{122}) R_{12} + R^3{}_{122} R_{13} - R^3{}_{121} R_{23} = \theta & \\
2) & R^2{}_{133} R_{12} + (R^3{}_{133} + R^1{}_{131}) R_{13} - R^2{}_{131} R_{23} = \theta & \\
3) & - R^1{}_{233} R_{12} + R^1{}_{232} R_{13} + (R^3{}_{233} + R^2{}_{232}) R_{23} = \theta & \\
4) & [R_{13}, R_{12}] = R^2{}_{123} R_{12} + (R^1{}_{121} + R^3{}_{123}) R_{13} + R^2{}_{121} R_{23} & \\
5) & [R_{23}, R_{12}] = - R^1{}_{123} R_{12} + R^1{}_{122} R_{13} + (R^2{}_{122} + R^3{}_{123}) R_{23} & (S2) \\
6) & [R_{12}, R_{13}] = (R^1{}_{131} + R^2{}_{132}) R_{12} + R^3{}_{132} R_{13} - R^3{}_{131} R_{23} & \\
7) & [R_{23}, R_{13}] = - R^1{}_{133} R_{12} + R^1{}_{132} R_{13} + (R^2{}_{132} + R^3{}_{133}) R_{23} & \\
8) & [R_{12}, R_{23}] = (R^1{}_{231} + R^2{}_{232}) R_{12} + R^3{}_{232} R_{13} - R^3{}_{231} R_{23} & \\
9) & [R_{13}, R_{23}] = R^2{}_{233} R_{12} + (R^1{}_{231} + R^3{}_{233}) R_{13} + R^2{}_{231} R_{23}\ , &
\end{array}$$

où θ désigne la matrice carrée nulle d'ordre 3.

Nous avons quatre cas différents à étudier suivant le rang du triplet (R_{12}, R_{13}, R_{23}) :

$$\begin{array}{ll}
I) & rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 3, \\
II) & rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 2, \\
III) & rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 1, \\
IV) & rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 0.
\end{array}$$

Le cas *IV)* caractérise le système triple de Lie trivial, c.-à-d. le système où $(x, y, z) = \mathbf{0}$ pour tous les éléments x, y, z de T .

La proposition suivante est nécessaire pour l'étude des autres cas (*I, II, III*). En effet elle démontre l'invariance du rang du triplet des matrices des constantes structurales.

Proposition 2

Le rang du triplet des matrices des constantes structurales est invariant par rapport au changement de base dans le système triple de Lie *T*. En d'autres termes, si $(e_i)^3_{i=1}$ et $(e_{i'})^3_{i'=1}$ sont deux bases arbitraires de *T,* alors

$$rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = rang(R_{1'2'}, R_{1'3'}, R_{2'3'})$$

Démonstration

Puisque les différents cas peuvent être traités d'une façon similaire, nous nous contentons de faire la démonstration dans le cas *I)* c.-à-d. où $rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 3$.
Soient (R_{12}, R_{13}, R_{23}) et $(R_{1'2'}, R_{1'3'}, R_{2'3'})$ les triplets des matrices des constantes structurales dans les deux bases $(e_i)^3_{i=1}$ et $(e_{i'})^3_{i'=1}$. Désignons par $E = (e^i{}_{i'})$ la matrice de passage de la première base à l'autre. Nous avons donc,

$$e_{i'} = e^i{}_{i'} e_i\ , \qquad det\, E \neq 0.$$

D'autre part

$$(e_{i'}, e_{j'}, e_{k'}) = R^{\alpha'}{}_{i'j'k'} e_{\alpha'}$$

et par suite

$$(e^{i}_{i'}\, e_i\, ,\; e^{j}_{j'}\, e_j\, ,\; e^{k}_{k'}\, e_k) = R^{\alpha'}{}_{i'j'k'}\, e^{\alpha}{}_{\alpha'} e_\alpha$$

donc

$$e^{i}_{i'}\, e^{j}_{j'}\, e^{k}_{k'}\, R^{\alpha}{}_{ijk}\, e_\alpha = R^{\alpha'}{}_{i'j'k'}\, e^{\alpha}{}_{\alpha'} e_\alpha \;,$$

par conséquent

$$R^{\alpha'}{}_{i'j'k'} = e^{i}_{i'}\, e^{j}_{j'}\, e^{k}_{k'}\, R^{\alpha}{}_{ijk}\, \hat{e}^{\alpha'}{}_{\alpha}\,, \qquad (**)$$

où $(\hat{e}^{\alpha'}{}_{\alpha})$ est la matrice inverse de E.

D'après la relation *(**)*, nous obtenons

$$R_{i'j'} = \sum_{i<j} \det_{(i',j')}(i,j)\, E\, R_{ij}\, E^{-1} \;,$$

où

$$\det_{(i',j')}(i,j) = e^{i}_{i'}\, e^{j}_{j'} - e^{i}_{j'}\, e^{j}_{i'}\,.$$

Supposons que

$$\lambda R_{1'2'} + \mu R_{1'3'} + \nu R_{2'3'} = \theta \;,$$

d'où le système en λ , μ *et* ν

$$\begin{cases} \lambda \det_{(1',2')}(1,2) + \mu \det_{(1',3')}(1,2) + \nu \det_{(2',3')}(1,2) = 0 \\ \lambda \det_{(1',2')}(1,3) + \mu \det_{(1',3')}(1,3) + \nu \det_{(2',3')}(1,3) = 0 \\ \lambda \det_{(1',2')}(2,3) + \mu \det_{(1',3')}(2,3) + \nu \det_{(2',3')}(2,3) = 0 \end{cases}$$

En utilisant la condition $\det E \neq 0$, nous déduisons sans difficulté que $\lambda = \mu = \nu = 0$.

C.Q.F.D

Remarquons que la proposition 2 admet une généralisation au cas *n*-dimensionnel .

Reprenons maintenant l'étude des 3 cas *I), II), III)* susmentionnés

CAS I : $rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 3$.

L'indépendance linéaire des matrices R_{12} , R_{13}, R_{23} et l'antisymétrie dans l'algèbre de Lie entraînent d'après le système (S2) les relations suivantes:

$- R^2{}_{123} = R^1{}_{131} + R^2{}_{132}$; $\quad - R^3{}_{132} = R^1{}_{121} + R^3{}_{123}$ $\quad R^2{}_{121} = R^3{}_{131}$

$R^1{}_{123} = R^1{}_{231} + R^2{}_{232}$; $\quad R^1{}_{122} = -R^3{}_{232}$; $\quad R^3{}_{231} = R^2{}_{122} + R^3{}_{123}$

$R^2{}_{133} = R^2{}_{233}$; $\quad - R^1{}_{132} = R^1{}_{231} + R^3{}_{233}$; $\quad - R^2{}_{231} = R^2{}_{132} + R^3{}_{133}$

$R^1{}_{121} + R^2{}_{122} = 0$; $\quad R^3{}_{122} = 0$; $\quad R^3{}_{121} = 0$

$R^2{}_{133} = 0$; $\quad R^3{}_{133} + R^1{}_{131} = 0$; $\quad R^2{}_{131} = 0$

$R^1{}_{233} = 0$; $\quad R^1{}_{232} = 0$; $\quad R^3{}_{233} + R^2{}_{232} = 0.$

Cela veut dire que les matrices R_{12} , R_{13} et R_{23} possèdent les formes suivantes :

$$R_{12} = \begin{pmatrix} -\gamma & b & 0 \\ a & \gamma & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_{13} = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & b \\ \alpha & 0 & \gamma \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & \gamma \\ 0 & \alpha & -a \\ 0 & c & -\alpha \end{pmatrix},$$

où a, b, c, α, β et γ sont des nombres complexes tels que $rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 3$.

Cela permet d'énoncer le lemme suivant dont la démonstration n'exige que des simples vérifications directes.

Lemme 1

Dans le cas où $rang(R_{12}\ ,\ R_{13}\ ,\ R_{23}) = 3,$ il existe des bases canoniques dans lesquelles les matrices des constantes structurales possèdent l'une des formes suivantes :

1) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

2) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

3) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

4) $R_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

5) $R_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

La démonstration du lemme suivant est évidente.

Lemme 2

Les systèmes triples de Lie correspondant aux cas 1) et 2) donnés dans le lemme précédent sont isomorphes.

Les lemmes 1 et 2 donnent le théorème suivant

Théorème 1

Dans le cas où $rang(R_{12}\ ,\ R_{13}\ ,\ R_{23}) = 3,$ il existe à un isomorphisme près seulement quatre systèmes triples de Lie non isomorphes deux à deux, pour lesquelles dans des bases canoniques convenables les matrices des constantes structurales possèdent l'une des formes suivante :

A1) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A2) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

A3) $R_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

A4) $R_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

CAS II **:** $rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 2.$

Dans le cas considéré, nous déduisons du système (S2) les relations :

$R^1_{132} + R^1_{231} + R^3_{233} = 0,$
$R^2_{132} + R^3_{133} + R^2_{231} = 0,$
$R^3_{132} = 0,$ $R^3_{131} = 0,$ $R^3_{232} = 0,$ $R^3_{231} = 0,$
$R^1_{131} + R^3_{133} = 0,$ $R^2_{131} = 0,$
$R^1_{232} = 0,$ $R^3_{233} + R^2_{232} = 0.$

Cela veut dire que les matrices des constantes structurales possèdent les formes :

$$R_{12} = \theta, \qquad R_{13} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ -\dfrac{\beta}{2} & -\dfrac{\alpha}{2} & 0 \\ a & b & \alpha \end{pmatrix}, \qquad R_{23} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\beta}{2} & -\dfrac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ c & d & \beta \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d, α et β sont tels que $rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 2.$
Nous avons alors une algèbre matricielle de Lie de dimension 2. Or, nous savons (Jacobson, 1962) qu'il existe à un isomorphisme près seulement deux algèbres de Lie bidimensionnelles sur le corps $\mathbb{C}$:

1. l'algèbre de Lie abélienne $[R_{13}, R_{23}] = \theta$,
2. l'algèbre de Lie simple $[R_{13}, R_{23}] = R_{13}$.

Cela nous permet de formuler le théorème suivant

Théorème 2

Dans le cas où $rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 2,$ il existe des bases canoniques dans lesquelles les matrices des constantes structurales possèdent l'une des formes suivantes :

F1) $R_{12} = \theta,$ $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(a \in \mathbb{C}^*)$.

F2) $R_{12} = \theta$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4a & 2 \end{pmatrix}$, $(a \in \mathbb{C})$.

F3) $R_{12} = \theta$, $R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 4a & 2 \end{pmatrix}$, $(a \in \mathbb{C})$.

CAS III : $rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 1$.

Dans le cas considéré, nous déduisons du système (S2) et sans restreindre la généralité les relations suivantes :

$$R_{12} = \begin{pmatrix} -\alpha & a & b \\ c & \alpha & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_{13} = \theta, \qquad R_{23} = \theta,$$

qui nous permettent de formuler le théorème suivant

Théorème 3

Dans le cas où $rang(R_{12}, R_{13}, R_{23}) = 1$, il existe des bases canoniques dans lesquelles les matrices des constantes structurales possèdent l'une des formes suivantes :

A5) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \theta$, $R_{23} = \theta$,

A6) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \theta$, $R_{23} = \theta$,

A7) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \theta$, $R_{23} = \theta$,

A8) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \theta$, $R_{23} = \theta$,

A9) $R_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \theta$, $R_{23} = \theta$,

F4) $R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{13} = \theta$, $R_{23} = \theta$, $(a \in \mathbb{C})$.

Le théorème suivant résume notre résultat de classification

Théorème 4

Dans le cas où *n = 3,* il existe (à un isomorphisme près), 9 types (autres que l'algèbre triviale) et 4 familles monoparamétriques de systèmes triples de Lie : A1) - A9) et F1) - F4).

PROBLÈME

La classification doit avoir sans doute des applications physiques et mécaniques. Nous pensons, alors, qu'il serait intéressant de réaliser la même classification sur le corps R, tâche qui ne semble pas assez aisée.

REMERCIEMENT

Nous tenons à remercier le CNRS qui soutient ce travail dans le cadre de son appui à l'Équipe d'Étude et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe, à laquelle appartiennent les auteurs.

REFERENCES

Cartan, E. 1926, 1927. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann., *Bull. Soc. Math.,* France, 54: 214-264, 55: 114-134.

Doubrovine, B., Novikov, S., Fomenko, A. 1982. *Géométrie contemporaine.* 2e partie. Mir, Moscou.

Helgason, S. 1962. *Differential geometry and symmetric spaces.* N.Y: Academic Press.

Jacobson, N. 1962. *Lie Algebras.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. Number 10. N.Y.

Loos, O. 1969. *Symmetric spaces.* N.Y. W.A.Benjamen.

Weinberg, S. 1972. *Gravitation and cosmology*. N.Y. John Wiley and Sons.