CONVERGENCE PRESQUE PARTOUT DES MOYENNES VECTORIELLES MULTIDIMENSIONNELLES

Kassem El Berdan et Hassan Zeineddine
Université Libanaise, Faculté des Sciences V.
Département de Mathématiques. Nabatieh, Liban
E-mail: kberdan@inco.com.lb

(Reçu le 8 janvier 1998; accepté le 22 juillet 1999)

RESUME

Soient X un espace de Banach réflexif, Ω un espace mesure, $T_1, \dots, T_d$ des opérateurs linéaires (non commutant), contractant dans $L^\infty(X)$ et strictement contractant dans $L^1(\Omega, X) = L^1(X)$ (i.e. il existe $\alpha_j \in]0, 1[$ tel que

$$\|T_j f\| \leq \alpha_j \|f\| \text{ pour tout } j = 1, \dots, d \text{ et } f \in L^1(X).$$

Nous montrons une inégalité maximale pour les moyennes:

$$A_n(T_1, \dots, T_d)f = \frac{1}{n^d} \sum_{i_1=0}^{n-1} \dots \sum_{i_d=0}^{n-1} T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d} f$$

ainsi que la convergence presque partout de celles-ci pour tout $f \in L^1(X)$.

Ceux-ci généralise le théorème de Chacon (Chacon 1962) au cas multidimensionnel pour cette classe d'opérateurs.

Enfin, nous donnons, deux opérateurs strictement contractant dans $L^1(X)$, contractant dans $L^\infty(X)$ et la convergence presque partout des moyennes n'est pas triviale.

Keywords: convergence, moyennes vectorielles

ABSTRACT

Let X be a reflexive Banach space, Ω a measure space, $T_1, \dots, T_d$ be linear not commuting operators on $L^1(\Omega, X) = L^1(X)$ which are strictly contracting in $L^1(X)$ (i.e. there exist $\alpha_j \in]0, 1[$ such that $\|T_j f\| \leq \alpha_j \|f\|$ for all $j = 1, \dots, d$ and $f \in L^1(X)$), and contracting in $L^\infty(X)$. We prove a maximal equality for the averages:

$$A_n(T_1, \dots, T_d)f = \frac{1}{n^d} \sum_{i_1=0}^{n-1} \dots \sum_{i_d=0}^{n-1} T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d} f$$

and the convergence almost everywhere of it for all f in $L^1(X)$.

Chacon 19620 to the multidimen- This result generalizes Chacon's theorem (sional case for this operators class.

Finally, we give two operators which are strictly contracting in $L^1(X)$ and contracting in $L^\infty(X)$ such that the convergence of the averages is not trivial.

Notations et Définitions

On désigne par X un espace de Banach, (Ω, β, μ) un espace mesuré σ -finie, $\|(\cdot)\|_X$ la norme sur l'espace X .

- $L^1(\Omega, X) = L^1(X) = \{f: \Omega \longrightarrow X, \text{ mesurable et } \int_{\Omega} \|f(\omega)\|_X d\mu(\omega) < \infty\}$

l'espace des fonctions intégrables au sens de Bochner qui prennent leurs valeurs dans X , et $L^\infty(\Omega, X) = L^\infty(X) = \{f: \Omega \longrightarrow X, \text{ mesurable et bornée p.s. (i.e } \sup_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|_X < \infty)\}$.

- $L^1 = L^1(\Omega, \mathbb{R})$, $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

- Pour tout $f \in L^1(X)$, on note $\|f\|_1 = \int_{\Omega} \|f(\omega)\|_X d\mu(\omega)$ et $\|f\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|_X$.

- Si T est un opérateur de $L^1(X)$ dans lui même, T est dit contractant (resp. strictement contractant) dans $L^1(X)$ ssi $\|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$ (resp. Il existe $\alpha \in]0, 1[$ et $\|Tf\|_1 \leq \alpha \|f\|_1$ pour tout

$f \in L^1(X)$, de même, T est dit contractant dans $L^\infty(X)$ ssi pour tout $f \in L^\infty(X)$, $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

- On note $A_n(T) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j$ et $A_n(T_1, \dots, T_d)f = \frac{1}{n^d} \sum_{i_1=0}^{n-1} \dots \sum_{i_d=0}^{n-1} T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d} f$.

INTRODUCTION

En 1962 R.V. Chacon a montré la convergence p.s. des moyennes de Cesaro des puissances d'un opérateur linéaire T , $A_n(T)f = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j f$, agissant dans $L^1(X)$ et contractant à la fois dans $L^1(X)$ et dans $L^\infty(X)$. Ω étant un espace mesuré de mesure finie et X un espace de Banach réflexif.

En 1973 (Krengel, 1985), en utilisant le module linéaire, A. Brunel a montré la convergence presque sûre des moyennes $\frac{1}{n^d} \sum_{i_1=0}^{n-1} \dots \sum_{i_d=0}^{n-1} T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d} f$ lorsque $f \in L^1$, et $T_1, \dots, T_d$ des opérateurs linéaires "réels" contractant dans L^1 et dans L^∞ et commutant deux à deux.

Nous généralisons le théorème de Chacon au cas multidimensionnel, pour les opérateurs linéaires contractant dans $L^\infty(X)$ mais strictement contractant dans $L^1(X)$.

La difficulté dans le cas vectoriel réside dans l'absence d'un module linéaire (El Berdan, 1995).

Etudions le cas de deux opérateurs, le cas général se traite d'une manière analogue:

Lemme 1

Soit T et S deux opérateurs de $L^1(X)$ dans lui même, contractant dans $L^\infty(X)$ et strictement contractant dans $L^1(X)$. Si pour tout $a > 0$,

$$e^*(a) = \left\{ \omega \in \Omega; \sup_n \left\| \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} T^i S^j f(\omega) \right\|_X > a \right\}$$

alors

$$a \mu[e^*(a)] \leq C(T, S) \int_{\Omega} \|f(\omega)\|_X d\mu(\omega)$$

où $C(T, S)$ est une constante ne dépend que de T et de S .

Démonstration

Soient $f \in L^1(X)$, $f^* = \sup_n \left\| \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n T^i S^j f(\cdot) \right\|_X$, α et β deux réels dans l'intervalle $]0,1[$ telsque $\|Tf\|_1 \leq \alpha \|f\|_1$ et $\|Sf\|_1 \leq \beta \|f\|_1$. Il est facile de verifier, par induction, que pour tout i et $j \in \mathbb{N}$.

$$\|T^i f\|_1 \leq \alpha^i \|f\|_1, \quad \|S^j f\|_1 \leq \beta^j \|f\|_1, \quad \text{et} \quad \|T^i S^j f\|_1 \leq \alpha^i \beta^j \|f\|_1$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sup_n \left\| \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} T^i S^j f(\omega) \right\|_X d\mu(\omega) &\leq \int_{\Omega} \sum_n \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|T^i S^j f(\omega)\|_X \right] d\mu(\omega) \\ &= \sum_n \int_{\Omega} \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|T^i S^j f(\omega)\|_X d\mu(\omega) \\ &= \sum_n \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|T^i S^j f\|_1 \right] \\ &\leq \sum_n \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^i \beta^j \right] \|f\|_1 \\ &\leq \sum_n \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \right] \left[\sum_{j=0}^{n-1} \beta^j \right] \|f\|_1 \\ &\leq \left(\sum_n \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \right] \right) \|f\|_1 \\ &= \left(\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} \sum_n \frac{1}{n^2} \right) \|f\|_1 \\ &= \frac{\pi^2}{6(1-\alpha)(1-\beta)} \|f\|_1 \\ &= C(T,S) \|f\|_1 \end{aligned}$$

$$\text{où } C(T,S) = \left(\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} \right) \sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6(1-\alpha)(1-\beta)}$$

Ce qui montre que