FORMALISME LAGRANGIEN ET DUALITÉ EN MÉCANIQUE

J.F. Ganghoffer
LEMTA, UMR 7563, ENSEM, 2, Avenue de la Forêt de Haye, B.P. 160
54504 VANDOEUVRE Cedex France
jfgangho@ensem.inpl-nancy.fr

(Received 26 January 2002 Accepted 12 July 2002)

RESUME

Ce travail constitue une extension de la formulation Lagrangienne et Hamiltonienne en élasticité à la prise en compte de la viscoplasticité, qui prend appui sur la notion de dualité. Les lois de comportement viscoplastiques sont construites tout d'abord avec une approche par potentiel de dissipation, puis avec un formalisme issu de la thermodynamique non-linéaire de la relaxation.

Mots clés : formalismes lagrangien et hamiltonien, dualité, viscoplasticité

ABSTRACT

This work constitutes an extension of the lagrangian and hamiltonian formulation in elasticity taking into consideration the viscoplasticity, relying on the concept of duality. The viscoplastic constitutive laws are first established with an approach involving a dissipation potential, and then using a non-linear thermodynamics of relaxation phenomena.

Keywords: lagrangian and hamiltonian formalisms, duality, viscoplasticity

INTRODUCTION

La dualité des problèmes variationnels en mécanique a fait l'objet de travaux depuis une quinzaine d'années, cf. (Temam, 1983) en ce qui concerne les aspects mathématiques, notamment en plasticité. La dualité en mécanique est illustrée par le diagramme de Tonti, (Bui, 1993) : les équations de la dynamique forment le problème dit primal, auquel on associe le problème dual, qui décrit la compatibilité cinématique. A la dualité entre variables (cinématiques / statiques) correspond une dualité entre opérateurs. Considérons le problème primal

$$T\phi + b = 0 \tag{1}$$

avec T un opérateur qui agit sur la variable ϕ (de nature vectorielle), qui incorpore une équation aux dérivées partielles et des conditions limites et initiales associées, et b un terme source. Lorsque l'opérateur adjoint de T existe, soit T^*, il vérifie :

$$(\phi, T\psi) = (\psi, T^*\phi) \qquad (2),$$

et le problème adjoint est alors

$$T^*\tilde{\phi} + \tilde{a} = 0 \qquad (3)$$

avec $\tilde{a}$ un terme source, situé dans l'image de T^*. Dans un contexte mécanique, ψ joue alors le rôle de la déformation et ϕ celui de la contrainte ; l'égalité (2) correspond dans le cas de l'élasticité aux relations de réciprocité de Maxwell-Betti. L'opérateur T est auto adjoint lorsque

$$(\phi, T\psi) = (\psi, T\phi) \qquad (4)$$

donc si $T = T^*$ (comparer (2) et (4)). Dans le cas de milieux dissipatifs, l'opérateur du problème aux limites n'est en général pas auto-adjoint (Sewell, 1987), et l'établissement d'une forme Lagrangienne est problématique. Nous établissons dans cette Note des formalismes Lagrangien et Hamiltonien dans le cas de la viscoplasticité et d'une approche thermodynamique, choisies à titre d'illustration de loi de comportement dissipative en mécanique.

FORMALISME LAGRANGIEN ET HAMILTONIEN EN VISCOPLASTICITE

Il est intéressant d'exprimer la dualité des équations de champ locales sous forme faible. Le problème primal est écrit en termes de la contrainte de Cauchy σ, en statique (Sewell, 1987)

$$\text{(P)} \qquad \left| \begin{array}{l} -\nabla.\sigma + \rho f = 0 \ \text{ dans } \ V \\ \sigma.n - t = 0 \quad \text{sur } \ S_t \end{array} \right. ,$$

avec S_t la partie de la surface de V, sur laquelle on applique une densité surfacique d'efforts t connus. La compatibilité cinématique écrite en vitesse est automatiquement satisfaite lorsque la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ dérive d'un champ de vecteurs vitesse $\dot{u}$. Le problème dual de (P) est

$$(D)\qquad \left|\begin{array}{l}(\nabla^S \dot{u}) - \dot{\varepsilon} = 0 \ \text{dans V} \\ \dot{u} - \bar{\dot{u}} = 0 \ \text{sur } S_u\end{array}\right.$$

où l'on impose la vitesse égale à $\bar{\dot{u}}$ sur la frontière S_u. (P) s'écrit sous la forme opérationnelle $T\tilde{\sigma} + \tilde{b} = 0$, avec

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma \ \text{dans V} \\ \sigma \ \text{sur } S_t \\ \sigma \ \text{sur } S_u \end{pmatrix} \ ; \ T\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} -\nabla.\sigma \ \text{dans V} \\ \sigma.n \ \text{sur } S_t \\ 0 \ \text{sur } S_u \end{pmatrix} \ ; \ \tilde{b} = \begin{pmatrix} -\rho f \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Le problème (D) s'exprime lui-même sous forme d'opérateur $T^*\tilde{\dot{u}} + \tilde{a} = 0$, avec

$$\tilde{\dot{u}} = \begin{pmatrix} \dot{u} \ \text{dans V} \\ \dot{u} \ \text{sur } S_t \\ \dot{u} \ \text{dans } S_u \end{pmatrix} ; T^*\tilde{\dot{u}} = \begin{pmatrix} (\nabla^s \dot{u}) \ \text{dans V} \\ 0 \ \text{sur } S_t \\ -\frac{1}{2}(n \otimes \dot{u} + \dot{u} \otimes n) \ \text{sur } S_u \end{pmatrix} ; \tilde{a} = \begin{pmatrix} -\dot{\varepsilon} \\ 0 \\ \frac{1}{2}(n \otimes \tilde{\dot{u}} + \tilde{\dot{u}} \otimes n) \end{pmatrix} \tag{6}$$

La formule de Green suivante

$$\int_V \sigma : \nabla^s \dot{u} \, dV - \int_{S_u} \sigma : \frac{1}{2}(n \otimes \dot{u} + \dot{u} \otimes n) \, dS = -\int_V \dot{u}.\nabla.\sigma dV + \int_{S_t} \dot{u}.n.\sigma \, dS \tag{7}$$

associée à la définition suivante du produit scalaire de deux vecteurs $(\tilde{a}, \tilde{b})$,

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) = \int_V a.b \, dV + \int_{S_u} a.b \, dV + \int_{S_t} a.b \, dV \tag{8}$$

établit la connexion (2) entre le problème primal et le problème dual, selon la relation

$$(\tilde{\dot{u}}, T\tilde{\sigma}) = (\tilde{\sigma}, T^*\tilde{\dot{u}}) \tag{9}$$

On cherche à établir une forme lagrangienne des problèmes (P) et (D) ; le Lagrangien $L[\dot{u}, \sigma]$ doit vérifier les conditions de stationnarité

$$\delta L = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}, \delta \dot{u} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \sigma}, \delta\sigma \right) = 0 \tag{10}$$

qui conduisent au problème primal $\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0$ et au problème dual $\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0$; de (P), (D) et (10), il vient

$$L[\dot{u},\sigma] = (T\tilde{\sigma},\tilde{\dot{u}}) + (\tilde{a},\tilde{\sigma}) + (\tilde{b},\tilde{\dot{u}}) \tag{11}$$

soit dans le présent contexte et en fonction de la forme des problèmes (P) et (D)

$$L[\dot{u},\sigma] = -\int_V \left[(\nabla.\sigma + f).\dot{u} + \sigma:\dot{\varepsilon}\right] dV + \int_{S_u} \bar{\dot{u}}.\sigma.n.dS + \int_{S_t} \dot{u}.(\sigma.n - t)\, dS \tag{12}$$

On vérifie que les équations des problèmes (P) et (D) sont les vraies équations d'Euler-Lagrange, associées à l'intégrale d'action $S = \int_t L[\dot{u},\sigma]dt$.

On décompose alors la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ de façon additive en la vitesse de déformation élastique $\dot{\varepsilon}^e = S:\dot{\sigma}$, avec S le tenseur de souplesse, et $\dot{\varepsilon}^{vp}$ la vitesse de déformation viscoplastique, que l'on suppose dériver d'un pseudo-potentiel de dissipation en contrainte $\Omega(\sigma)$, selon

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\partial\Omega(\sigma)}{\partial\sigma}$$

Le problème dual exprime alors la loi de comportement selon :

$$(D)\quad \left| \begin{array}{l} (\nabla^S\dot{u}) - (S:\dot{\sigma} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial\sigma}) = 0 \text{ dans } V \\ \dot{u} - \bar{\dot{u}} = 0 \text{ sur } S_u \end{array} \right.$$

qui se présente sous une forme opérationnelle analogue à (6). On obtient le Lagrangien

$$L[\dot{u},\sigma] = -\int_V \left[(\nabla.\sigma + f).\dot{u} + (S:\dot{\sigma}:\sigma + \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}:\sigma) \right] dV + \int_{S_u} \bar{\dot{u}}.\sigma.ndS + \int_{S_t} (\sigma.n - t).\dot{u}dS$$

dont la stationnarité conduit bien au problème primal et au problème dual. Le terme $S:\dot{\sigma}:\sigma + \dfrac{\partial\Omega}{\partial\sigma}:\sigma = \sigma:\dot{\varepsilon}$ représente la puissance des efforts intérieurs.

La loi de comportement résulte directement de la stationnarité du lagrangien. Ce formalisme s'apparente à celui établi par Stolz (1988), qui introduit une force visqueuse (dérivant du potentiel de dissipation) comme second membre dans les équations d'Euler-Lagrange. Dans la présente approche, on étend le nombre d'arguments du Lagrangien, qui contient alors à lui seul toute l'information nécessaire concernant l'état du système.

L'étude de l'extension possible de ce formalisme à des comportements thermomécaniques plus généraux est en cours.

REFERENCES

Bui, H.D. 1993. *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*. Editions Eyrolles.

Sewell, M.J. 1987. *Maximum and minimum principles*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press.

Stolz, C. 1988. Sur les équations générales de la dynamique des milieux continus anélastiques. *C.R. Acad. Sci*. Paris, t. 307, Série II : 1997-2000.

Temam, R. 1983. *Problèmes mathématiques en plasticité*. Gauthiers-Villars, Bordas, Paris.