SYSTÈME NUMÉRIQUE DE LA MÉCANIQUE DÉTERMINISTE

M. Al-Houjairi
Université Libanaise, Faculté de Génie-1, Tripoli, Liban
houjairi@hotmail.com

(Received 4 June 2003 Accepted 9 September 2003)

RÉSUMÉ

Les systèmes numériques représentent des modèles mathématiques idéalisés quasi-adéquats aux rapports quantitatifs dans le monde réel. Le présent travail est orienté à mettre les accents sur quelques aspects du déterminisme au cours du développement théorique de la conception du nombre.

Or toutes les théories des nombres réels sont équivalentes, bien qu'elles soient d'origines et de motivations distinctes. Dans le présent travail, nous essayons de mettre l'accent sur le fait que l'équivalence de ces différentes théories n'est pas le fruit du hasard mais c'est la conséquence d'un certain déterminisme. Les principaux facteurs du déterminisme dans la construction du corps R *sont conditionnés par l'exigence en mécanique de l'unicité de la trajectoire d'un mouvement à conditions initiales données.*

Mots clés: systèmes numériques, déterminisme mécanique, conventionnalisme dans les mathématiques, Laplace, Cantor, Dedikind, Hilbert, Péano, Wantzel, Weierstrass, Cauchy, D'Alembert, Newton, Bolzano

ABCTRACT

The numeric systems seem to represent idealized mathematical models with near-adequacy to quantitative affinities in the real world. The present work is intended to emphasize some deterministic aspects during the theoretical development of number concepts.

As all theories of real numbers are equivalent, though they may be of distinct origins and incentives. The present study tries to shed some light on the fact that the equivalence of these different theories is not the result of chance rather the consequence of certain determinism. For instance, the principal deterministic factors involved in the construction of the R *field, are conditioned by the requirement, in mechanical science, of the uniqueness of the trajectory of a moving body with given initial conditions.*

Keywords: numerical systems, mechanical determinism, conventionalism in mathematics, Laplace, Cantor, Dedikind, Hilbert, Péano, Wantzel, Weierstrass, Cauchy, D'Alembert, Newton, Bolzano

INTRODUCTION

Les systèmes numériques représentent des modèles mathématiques idéalisés quasi-adéquats aux rapports quantitatifs dans le monde réel.

La notion de nombre s'est dégagée de la nécessité de mesurer des grandeurs (en particulier de compter), et de résoudre des équations algébriques (Bourbaki, 1970; Chilov, 1973; Hilbert et Bernays, 1968; Kurosh, 1973; Lang, 1965; Rudin, 1964). L'expérience pratique humaine a démontré l'insuffisance de la notion de nombres naturels pour la résolution de tels problèmes. Pour cela, on a introduit d'autres nombres: les nombres relatifs, rationnels, algébriques, réels, complexes, quaternions, le système des octaves, etc. (Kurosh, 1973).

La logique mathématique nous permet, en principe, de construire des théories axiomatiques rigoureuses de systèmes numériques, mais les degrés de conventionnalisme dans les constructions considérées ne peuvent pas nier le rôle dominant des facteurs objectifs du déterminisme conditionnés par le problème posé d'une part et par les lois objectives des rapports quantitatifs du monde réel d'autre part. Par exemple l'axiomatique de Péano (1858-1932) de l'ensemble $N = \{1, 2, 3, ...\}$ des entiers naturels, muni de deux lois de composition internes (addition et multiplication) commutatives et associatives, et d'une relation d'ordre compatible avec les lois indiquées, exprime un modèle quasi-adéquat des rapports quantitatifs réels qui concerne le comptage et l'induction comme deux procédures nécessaires dans l'activité humaine quotidienne (Bourbaki, 1970; Chilov, 1973; Hilbert et Bernays, 1968; Rudin, 1964).

Le système N des entiers naturels possède des "défauts" algébriques, par exemple, l'équation: $a + x = b$, (où a et b sont deux éléments de N) n'admet pas en général de solutions dans N. Par un procédé algébrique (duplication) on construit le système Z (des entiers relatifs) qui est un système de nombres, plus vaste que N, où toute équation de la forme: $a + x = b$, (où a et b sont deux éléments de Z) admet une solution; de plus N est plongé dans Z à l'aide d'un monomorphisme (c.-à-d. une application injective qui conserve les opérations internes et la relation d'ordre; en d'autres termes les propriétés des opérations algébriques et de la relation d'ordre sont des invariants de l'application indiquée) (Bourbaki, 1970; Chilov, 1973 ; Hilbert et Bernays, 1968; Kurosh, 1973; Lang, 1965; Rudin, 1964).

De nouveau, l'équation : $a.x = b$, (où a et b sont deux éléments de Z) n'admet pas en général de solutions dans Z. Par un procédé algébrique analogue à celui considéré ci-dessus on peut plonger Z à l'aide d'un monomorphisme d'anneaux, dans un système Q (nombres rationnels) plus large que Z. Le défaut essentiel de Q est de nature algébro-géométrique: en général, les polynômes à coefficients rationnels n'admettent pas de racines rationnelles, de plus l'ensemble Q ne peut pas être un outil analytique convenable pour la résolution des problème de constructibilité dans la géométrie, par exemple la diagonale d'un carré unitaire est déjà inexprimable à l'aide d'un rationnel. Pour cela on plonge Q dans un corps plus large, le corps des nombres algébriques A., de façon que le fossé entre la géométrie grecque et les nombres (irrationnels) soit comblé (Kurosh, 1973; Lang, 1965).

S'appuyant sur les résultats d'Abel (1802-1829) relatifs aux équations algébriques, Wantzel (1814-1848) a démontré en 1837 dans un mémoire intitulé "*Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre à la règle et au compas*", le résultat suivant: Tout nombre constructible x est racine d'un polynôme à coefficients entiers et le degré du polynôme minimal admettant x comme zéro est une puissance de *2*. Un tel nombre est donc algébrique.

À l'exception des problèmes relatifs à π (mesure du cercle), $\mathbb{A}$ peut donc résoudre tous les problèmes de constructibilité dans la géométrie euclidienne; si on remplace $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{A}^3$, les axiomes de la géométrie euclidienne restent valables[1]. On peut construire sur $\mathbb{A}^3$ (et en général sur $\mathbb{A}^n$), une géométrie euclidienne analogue à celle construite sur $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^n$). D'autre part le corps $\mathbb{A}$ est un outil algébrique convenable pour la résolution des équations algébriques, car les racines d'un polynôme à coefficients algébriques sont des nombres algébriques (en général complexes).

DÉTERMINISME DANS LA CONSTRUCTION DU CORPS DES NOMBRES REELS $\mathbb{R}$.

Du point de vue «grandeur physique», il n'y a pas de différence entre les nombres rationnels et irrationnels à cause de la nature approximative des moyens de mesure physique et car tout nombre irrationnel peut être approché à n'importe quel degré d'exactitude par un nombre rationnel.

Les nombres rationnels possèdent une interprétation physique, ils expriment une procédure de mesure réalisable à l'aide d'un nombre finis d'opérations. Au contraire les nombres irrationnels n'admettent pas, en général, d'interprétation physique directe[2], ils s'interprètent dans ce sens, seulement à l'aide d'une procédure formée d'une infinité d'opérations. Nous avons déjà vu dans l'introduction que l'irrationalité algébrique possède une interprétation algébro-géométrique, où le corps de nombres algébriques $\mathbb{A}$ paraît comme outil algébro-géométrique nécessaire pour résoudre les problèmes de constructibilité dans la géométrie euclidienne et de résolution des équations algébriques. Alors, on constate que l'irrationalité transcendante (non algébrique) - à l'exception de quelques cas particuliers comme le cas du nombre π - n'admet pas d'interprétations physiques, géométriques ou algébriques directes simples.

Le passage de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{R}$ semble revêtir un aspect conventionnaliste: les sous-ensembles non vides et bornés de $\mathbb{Q}$ (resp. de $\mathbb{A}$) ne possèdent pas en général de bornes supérieures (ni de bornes inférieures) dans $\mathbb{Q}$ (resp. dans $\mathbb{A}$), ce qui nous amène à plonger $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{A}$), à l'aide d'un monomorphisme, dans un système plus large $\mathbb{R}$ (nombres réels). Mais le passage de $\mathbb{Q}$ (resp. de $\mathbb{A}$) à $\mathbb{R}$ est déjà non algébrique, il est de nature topologique (Bourbaki, 1970; Chilov, 1973; Hilbert et Bernays, 1968; Rudin, 1964).

La première construction axiomatique directe de la théorie des nombres réels, sans utilisation des nombres rationnels, est due aux travaux de D. Hilbert (1862-1943) publiés en

---

[1] À l'exception de l'«axiome de continuité»

[2] Il n'y a pas de finitisme.

1900 (Chilov, 1973 ; Hilbert et Bernays, 1968 ; Rudin, 1964). Il existe d'autres théories équivalentes à celle de Hilbert, qui se basent sur les nombres rationnels et la représentation décimale non périodique (théorie de Weierstrass (1815-1897)) ou sur le principe des suites équivalentes de Cauchy (1789-1857) (complétion de l'ensemble Q – théorie de Cantor (1845-1918)) ou sur le principe de coupure de Dedekind (1831-1916) (Bourbaki, 1970 ; Chilov, 1973 ; Hilbert et Bernays, 1968 ; Kurosh, 1973 ; Lang, 1965 ; Rudin, 1964). Les constructions des nombres réels sont basées sur différentes idées: la connexité et la complétude (continuité) chez Dedikind, l'infinité du processus calculatoire chez Cantor et Weierstrass.

Or toutes les théories des nombres réels sont équivalentes (Bourbaki, 1970 ; Chilov, 1973 ; Hilbert et Bernays, 1968 ; Rudin, 1964), bien qu'elles soient d'origines et de motivations distinctes. Dans le présent travail, nous essayons de mettre l'accent sur le fait que l'équivalence de ces différentes théories n'est pas le fruit du hasard mais c'est la conséquence d'un certain déterminisme. Les principaux facteurs du déterminisme dans la construction du corps R sont conditionnés par l'exigence de la mécanique newtonienne. Celle-ci suppose en effet, l'unicité de la courbe intégrale d'une équation différentielle à conditions initiales données. Cette exigence relative à la mécanique exprime tout simplement le principe de «déterminisme mécanique», qui consiste à postuler l'unicité de la trajectoire d'un système mécanique en mouvement à partir d'une position initiale.

La mécanique de D'Alembert-Newton avait comme outil mathématique le calcul différentiel et intégral. Les lois d'une telle mécanique s'expriment, comme il est bien connu à l'aide de dérivée. Physiquement parlant, et indépendamment de la conception de nombre, la dérivée exprime - du point de vue de l'intuition - la vitesse d'un système mécanique en mouvement et l'histoire de la mécanique newtonienne témoigne que la dérivée dans le sens indiqué a été utilisée pour exprimer les lois mécaniques bien avant la formulation d'une définition stricte de nombre[3].

Nous essayons de démontrer dans la présente recherche, que le modèle numérique K, extension du corps Q des nombres rationnels, nécessaire pour garantir la satisfaction du principe de «déterminisme mécanique» dans la mécanique, n'est autre, à un isomorphisme près, que le corps R des nombres réels[4].

CORPS DE BASE, NON-THÉORICITÉ ET CONDITION DE NON-THÉORICITÉ DE LA MÉCANIQUE

[3] Il est évident que le concept de la vitesse - qui est un être physique concret - est plus riche et objectif que celui de la dérivée qui représente un concept numérique idéalisé «modélisant» la vitesse. En conséquence, on ne peut pas identifier les deux concepts et on est obligé d'avouer que la vitesse comme grandeur quantitative est antérieure et indépendante des êtres numériques introduits ultérieurement comme modèles abstraits.

[4] Il nous semble que ce résultat est important sur les plans mathématiques et épistémologiques, car l'axiomatique du corps R des nombres réels paraît parfois comme une construction théorique, plus ou moins «artificielle», visant l'élimination des «non-rigeurs» dans certaines démonstrations analytiques fondamentales. À la lumière de cette remarque, il serait logique de se demander: pourquoi choisir le corps R et pas d'autres? .

Soit K un corps totalement ordonné, extension du corps Q des nombres rationnels et qui vérifie les propriétés suivantes:

- K contient le corps A des nombres algébriques réels (c'est à dire K est suffisant comme outil mathématique pour résoudre les problèmes de constructibilité euclidienne et les problèmes des racines des polynômes à coefficients rationnels)
- K est suffisant pour exprimer «les caractéristiques numériques»[5] des êtres physiques et géométriques rencontrés dans la mécanique.

La mécanique ayant le corps K comme outil mathématique est désignée dans la suite par $M(K)$ et on convient de l'appeler mécanique définie sur K. On convient d'appeler K corps de base de $M(K)$.

Définition 1:

La mécanique $M(K)$ est dite non-théorique si pour l'équation différentielle décrivant le mouvement d'un certain système mécanique de $M(K)$, on peut trouver au moins deux solutions[6] différentes sur le même intervalle $]a,b[\subseteq K$ et vérifiant les mêmes conditions initiales. La mécanique $M(K)$ est dite théorique dans le cas contraire.

Il est évident que la mécanique non-théorique $M(K)$ est en contradiction avec le principe philosophique de «déterminisme mécanique». Dans une telle mécanique, il est impossible de prévoir les comportements d'un système mécanique[7].

Définition 2 :

On considère une fonction $\phi(t)$ de $]a,b[\subseteq K$ à valeurs dans K.. La fonction ϕ est dite localement constante dans l'intervalle $]a,b[$ si:

1. pour tout élément t de l'intervalle $]a,b[$ il existe un sous-intervalle $]\alpha,\beta[$ de $]a,b[$ contenant l'élément t, où la fonction $\phi(t)$ est constante.
   La fonction ϕ est dite quasi-constante si en plus que la condition 1, elle vérifie la condition:
2. La fonction $\phi(t)$ n'est pas constante sur $]a,b[$.

Théorème 1:

La mécanique $M(K)$ est non-théorique s'il est possible de construire une fonction $\phi(t)$ quasi-constante sur un certain intervalle non vide $]a,b[\subseteq K$.

[5] On entend par le terme «caractéristiques numériques», les analogues numériques modélisant (potentiellement) les grandeurs spatio-temporelles et leurs rapports.

[6] On entend par solution un modèle mathématique de la trajectoire du mouvement exprimant la dépendance spatio-temporelle du mouvement. Cette dépendance doit vérifier l'équation différentielle et les conditions initiales.

[7] Dans ce cas, la mécanique $M(K)$ n'est pas une théorie déductive.

Démonstration:

Supposons qu'une fonction $\phi\,(t)$ quasi-constante existe sur un certain intervalle non vide $]a,b[\ \subseteq K$.

Considérons sur $]a,b[$ deux point t_1 et t_2 tels que $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$ et considérons le système mécanique formé d'un seul point matériel en mouvement suivant l'axe des abscisses et sans action des forces extérieures et avec les conditions initiales: $x(t_1) = \phi(t_1)$ *et* $v(t_1) = 0$, ($x(t_1)$ *et* $v(t_1)$ désignent respectivement l'abscisse et la vitesse à l'instant initial $t = t_1$).

L'équation différentielle[8] décrivant le mouvement s'écrit, d'après la loi newtonienne sous la forme: $m.x'' = 0$, où m est la masse du point matériel. On vérifie que les deux fonctions différentes suivantes $x(t) = \phi\,(t)$ et $x(t) = \phi(t_1)$ sont des solutions de l'équation différentielle $m.x'' = 0$ avec les conditions initiales considérées[9].

Si la mécanique est théorique, alors toute fonction localement constante dans un intervalle $]a,b[$ du corps de base doit être constante, sinon on obtient une contradiction avec le théorème précédent. D'où :

Conséquence:

Si la mécanique $M(K)$ est théorique, alors toute fonction localement constante sur un intervalle $]a,b[\ \subseteq K$ est constante.

CONDITION DE THÉORICITÉ, ISOMORPHISME DE *K* ET *R*

Théorème 2:

Si $M(K)$ est théorique, alors le corps K est isomorphe au corps R des nombres réels.

Démonstration:

---

8 Bien que la définition de la dérivée admette une généralisation pour des fonctions qui ne sont pas nécessairement continues, notre construction n'exige pas de franchir la limite de la théorie classique où la continuité reste toujours une condition nécessaire de la dérivabilité. L'utilisation des symboles x' et x'', dans l'équation différentielle envisagée, est tout à fait formelle. Ils représentent la vitesse et l'accélération «réelles» qui existent indépendamment du modèle numérique introduit. La vitesse (resp. l'accélération) est un «être objectif» exprimant un certain rapport de deux grandeurs «réelles». Par conséquent, l'existence de la vitesse (resp. de l'accélération) est intrinsèque et ne dépend pas du modèle numérique choisi ou cherché.

9 a) Pour la première solution, la fonction $x(t) = \phi(t_1)$ modélisant «la grandeur spatiale» est constante et reste sans «modification». En conséquence, les fonctions $x'(t)$ et $x''(t)$ modélisant respectivement la vitesse et l'accélération sont nulles. En particulier, $x'(t_1) = 0$.

b) Pour la deuxième solution, la fonction $x(t) = \phi(t)$ modélisant «la grandeur spatiale» est quasi-constante et par définition, elle reste sans «modification» dans un certain voisinage de tout point t. En conséquence, les fonctions $x'(t)$ et $x''(t)$ modélisant respectivement la vitesse et l'accélération sont nulles. En particulier, $x'(t_1) = 0$.

Démontrons que toute partie non vide et majorée de K admet une borne supérieure. Soit P une partie non vide et majorée de K. Considérons l'ensemble D_p des majorants de P. Il y a trois cas à envisager:

1. L'ensemble P admet un plus grand élément α, qui sera évidemment, dans le cas d'existence, la borne supérieure de P et pour une telle situation il nous ne reste rien à démontrer.
2. L'ensemble D_p admet un plus petit élément β, qui sera évidemment, comme dans le cas précédent, la borne supérieure de P.
3. L'ensemble P n'admet pas un plus grand élément et D_p n'admet pas un plus petit élément. Dans ce cas, choisissons un point $a \in P$ et un point $b \in D_p$. L'intervalle $]a,b[$ est non vide et possède des intersections non vides avec P et D_p car P n'admet pas un plus grand élément et D_p n'admet pas un plus petit élément. Considérons la fonction $\phi(t)$ définie sur l'intervalle $]a,b[$ comme suit:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 \quad si \quad t \in \left(\complement_K D_P \right) \cap]a,b[\\ 0 \quad si \quad t \in D_P \cap]a,b[\end{cases} .$$

La relation $]a,b[= \{]a,b[\cap D_P\} \cup \{]a,b[\cap \left(\complement_K D_P \right)\}$ montre que la fonction $\phi(t)$ est bien définie et il est évident que $\phi(t)$ n'est pas constante sur $]a,b[$, car $]a,b[\cap \left(\complement_K D_P \right)$ *et* $]a,b[\cap D_p$ sont non vides tous les deux: le premier ensemble n'admet pas un plus grand élément (sinon ce dernier devient majorant de P qui fait partie de $\left(\complement_K D_P \right)$, et on obtient une contradiction avec la condition $D_P \cap \left(\complement_K D_P \right) = \phi$), le second n'admet pas un plus petit élément car D_p ne l'admet pas. Alors $\phi(t)$ est une fonction quasi-constante, mais ce qui contredit l'hypothèse: $M(K)$ est théorique qui entraîne, d'après la conséquence, l'impossibilité d'existence d'une telle fonction. Alors le troisième cas est impossible et P admet une borne supérieure.

Or tous les axiomes de la théorie hilbertienne des nombres réels sont vérifiés (Chilov, 1973; Hilbert et Bernays, 1968; Rudin, 1964), le corps K est isomorphe au corps des nombres réels R.

REMERCIEMENT

Nous tenons à remercier le CNRS qui soutient ce travail dans le cadre de son appui à l'Équipe d'Étude et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe, à laquelle appartient l'auteur. Enfin, l'auteur tient aussi à remercier son ami et collègue Dr N. Farès qui a bien voulu lire cet article et y rapporter ses remarques.

REFERENCES

Bourbaki, N. 1970. *Éléments de mathématiques, Théorie des ensembles.* Hermann, Paris.
Chilov, G. 1973. *Analyse mathématique, fonction d'une variable,* Tome 1. Mir, Moscou.
Hilbert, D., Bernays, P. 1968. *Grundlagen der mathematik.* Springer-Velarg, Berlin.

Kurosh, A. 1973. *Leçons d'algèbre générale*. Naouka, Moscou (en russe).
Lang, S. 1965. *Algebra*. Addison-Wesley, N.Y.
Rudin, W. 1964. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill, N.Y.