CALCUL DU MOMENT QUADRUPOLAIRE À L'AIDE DU PSEUDOTENSEUR DE PAPAPETROU

B. M. Rouhban, N. F. Dandach[1]
Université Libanaise, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques
[1] Département de Physique
Beyrouth, Liban
itsrouri1@hotmail.com

(Received 31 May 2000 Accepted 16 January 2002)

RESUME

En se basant - en théorie de relativité générale - sur la définition des moments multipolaires qui sont les coefficients des termes résultant du développement du potentiel créé par toutes les masses d'un système, et en utilisant les méthodes de superpotentiels, on trouve une méthode simple pour calculer les moments multipolaires d'un système de masses jusqu'au moment quadrupolaire à l'aide du pseudotenseur de papapetrou.

Une formule exacte (précise) est posée pour exprimer le tenseur du moment quadrupolaire. Comme application de cette formule on a obtenu les moments multipolaires et le moment d'inertie pour la solution d'Einstein obtenue par Mitskievic.

Mots clés: moments multipolaires, moment quadrupolaire, superpotentiels, pseudotenseur de Papapetrou

ABSTRACT

On the basis of the definition of multipole moments in general relativity, which are the coefficients in the expansion of the potential created by the mass of system, and using the methods of superpotential and the pseudotensor of Papapetrou, one finds a simple method for determining the multipole moments (up to quadrupole moment) of a system of mass.

An exact formula for calculating the quadrupole moment tensor is propounded. As an application one computed the moments and the moments of inertia of the Einstein solution obtained by Mitskievic.

Keywords: multipole moments, quadrupole moment, superpotential, pseudotensor of Papape-

trou

INTRODUCTION

L'étude du moment quadrupolaire est très importante dans la théorie de la gravitation. Contrairement à l'électromagnétisme, il n'existe pas un rayonnement dipolaire créé par le moment dipolaire de masse dans la physique de la gravitation.

Il est à rappeler que notre planète la terre qui n'a pas une forme parfaitement sphérique possède un moment quadrupolaire qui fait augmenter la précession de l'axe du gyroscope posé sur le satellite de la terre de 0,01" par an (Papapetrou, 1948). L'existence du moment quodruputaire dans le potentiel newtonien agit sur la précession de l'axe du gyroscope de telle sorte que l'orbite du satellite n'est pas exactement elliptique.

La connaissance des moments multipolaires d'une solution des équations d'Einstein permet d'interpréter cette solution dans la limite newtonienne, et de faire quelques conclusions sur la nature des sources produisant le champ gravitationnel et sur leurs potentiels. En effet, quand on obtient les moments multipolaires d'une solution des équations d'Einstein on peut construire le champ gravitationnel newtonien avec les mêmes moments et obtenir l'analogie newtonienne de cette solution. Xanthopoulos (1979) a démontré que l'espace-temps stationnaire pour lequel tous les moments multipolaires angulaires s'annulent est plan.

Durant les trois dernières décennies, plusieurs approches ont été développées concernant le calcul des moments multipolaires pour les solutions des équations d'Einstein. C'est ainsi que Geroch (1970 a; b) a utilisé les vecteurs conformes de Killing pour définir les moments multipolaires du champs gravitationnel dans une solution statique asymptotiquement plane des équations d'Einstein sans source.

En se servant de la méthode de Geroch, Hansen (1979) tira les moments multipolaires de la solution de Kerr. D'autres méthodes moins adéquates ont été abordées par Voorhees (1970) (pour obtenir le moment quadrupolaire de la solution de Weyl), par Hernandez (1967) (pour obtenir les moments de la solution de Kerr), par Tomimatsu et Sato (1973) *etc*…

Tanabe (1976) a présenté une nouvelle méthode pour calculer les moments multipolaires en introduisant le système de coordonnées harmoniques de Fock (1964) dans lequelle les potentiels appropriés sont développés par rapport à l'inverse de la distance à la source. Les développements sphériquo-harmoniques ont été utilisés aussi par Thorne (1980).

Xanthopoulos (1979) a remarqué que les définitions des moments multipolaires données par Geroch (1970 a ; b), par Clarke and Sciama (1971), par Hansen (1979), par Hoenselaers (1976), par Thorne (1980), par O'Connell (1969) et d'autres n'étaient pas équivalentes. Xanthopoulos (1979) a présenté un résultat indiquant que les moments multipolaires de Geroch-Hansen donne simplement des informations sur l'espace-temps.

Dans son article étendu Thorne (1980) a donné un développement détaillé du problème des moments multipolaires basé sur la méthode de développement sans utiliser les transformations conformes. Comme Hansen, Thorne généralisa la notion des moments multipolaires gravitationnels à l'espace-temps stationnaire asymptotiquement plan.

Beig et Simon (1981) ont montré que les termes du développement multipolaire sont uniquement déterminés par les moments multipolaires de Geroch-Hansen.

Willmer (1981) a proposé deux définitions des moments multipolaires: la première correspond au cas dans lequel les sources sont ignorées, la deuxième au cas qui prend compte des sources.

Dandach et Mitskievic (1979) ont proposé une méthode basée sur l'utilisation des pseudotenseurs pour calculer le moment quadrupolaire.

Fodor *et al*. (1989) ont développé un algorithme pour calculer le $n^{\text{ème}}$ moment gravitationnel d'un espace-temps stationnaire axisymétrique asymptotiquement plan.

Parmi ces méthodes on ne trouve pas une qui soit simple du point de vue mathématique.

Le but de cet article est de trouver une méthode simple permettant de calculer les moments multipolaires d'un champ gravitationnel dans une solution stationnaire axialement symétrique des équations d'Einstein. On a utilisé le pseudotenseur de Papapetrou et la méthode des superpotentiels pour effectuer le calcul de tous les moments multipolaires jusqu'au moment quadrupolaire, et les composantes du tenseur du moment d'inertie.

On va exposer ci-dessous, en détail, la méthode de calcul des moments multipolaires d'un système de masses à l'aide de pseudotenseur de Papapetrou. Et on va utiliser les formules obenues pour calculer les moments multipolaires de quelques métriques axiales-symétriques.

Les moments multipolaires ne sont pas covariants dans les transformations de Lorentz; pour cela on applique l'expression approximée des moments quadrupolaires sur les systèmes nonrelativistes, c'est-à-dire sur les systèmes ayant la densité d'énergie approximativement égale à la densité des masses au repos. On va calculer le moment quadrupolaire de tels systémes ayant leur champ stationnaire sachant que leur source peut se déplacer ultrarelativement.

CALCUL DES MOMENTS A L'AIDE DU PSEUDOTENSEUR DE PAPAPETROU

Comme en électrodynamique, on développe le potentiel d'après les puissances de 1/R, où R est le rayon-vecteur du potentiel créé par toutes les masses (dans le cas de la gravitation).

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots + \varphi^{(n)}$$

où le terme $\varphi^{(n)}$ est proportionnel à $1/R^{n+1}$. Dans le cas de la gravitation, le premier terme est déterminé par la masse du système, il correspond à M/R, où

$$M = \int \mu dV \ , \tag{1.1}$$

où μ est la densité de masse.

Le second terme est déterminé par le moment dipolaire du système

$$d = \int \mu r dV \ , \tag{1.2}$$

Le troisième terme est proportionnel au moment quadrupolaire D_{ij} du système, où le tenseur

$$D_{ij} = \int \mu \left(3x^i x^j - r^2 \delta^i j\right) dV \tag{1.3}$$

Il est convenu d'utiliser la méthode de pseudotenseur dans le calcul des moments multipolaires, et en particulier le pseudotenseur de Papapetrou (Papapetrou, 1948) qui a été utilisé pour la première fois par Mitskievic (1976) pour calculer la masse (le zero-moment) et le moment d'impulsion du système de Kerr. Nous avons utilisé le pseudotenseur de Papapetrou pour calculer le moment quadrupolaire (le second moment multipolaire) d'un système insulaire (Dandach and Mitskievic, 1979).

Puisque la distribution de la matière considérée a un caractère insulaire, il est possible d'utiliser la méthode qui permet de calculer d'une manière très simple l'énergie et le moment d'impulsion des systèmes insulaires (en utilisant les superpotentiels). Le développement de ce pseudotenseur dans le domaine d'un événement arbitraire, dans les coordonnées riemaniennes orthogonales, contient toutes les composantes du tenseur de superénergie de Weyl-Robinson. Dans cet article on va montrer l'utilisation de ce pseudotenseur dans le calcul du moment quadrupolaire; écrivons-le sous la forme générale comme suit:

$$2\kappa\theta^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}_{,\sigma,\tau}\delta^{\sigma\tau} + G^{\sigma\tau}_{,\sigma,\tau}\delta^{\alpha\beta} - G^{\alpha\sigma,\beta}_{,\sigma} - G^{\beta\sigma,\alpha}_{,\sigma} \tag{1.4}$$

où κ est la constante d'Einstein, $G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\sqrt{|g|}$ est la densité tensorielle, $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique et g le déterminant du tenseur métrique.

En utilisant la méthode des superpotentiels représentant le pseudotenseur sous la forme d'une divergence d'une expression antisymétrique par deux indices, on peut écrire le superpotentiel sous la forme:

$$h^{\alpha[\beta\tau]} = G^{\alpha\beta}_{,\sigma}\delta^{\sigma\tau} - G^{\alpha\tau}_{,\sigma}\delta^{\sigma\beta} + G^{\sigma\tau}_{,\sigma}\delta^{\alpha\beta} - G^{\sigma\beta}_{,\sigma}\delta^{\alpha\tau} \tag{1.5}$$

Notons que:

$$2\kappa\theta^{\alpha\beta} = h^{\alpha[\beta\tau]}_{,\tau} \tag{1.6}$$

L'expression intégrale de la 4-impulsion est définie par

$$2\kappa\int \theta^{\alpha 0} dV = \int h^{\alpha\,[0k]}_{\quad ,k} dV = \oint h^{\alpha[0k]} dS_k \tag{1.7}$$

où $dS_K = rx^K \sin\theta \ d\theta \ d\varphi$ dans les coordonnées cartisiennes. Le superpotentiel pour la masse (l'énergie) s'obtient alors comme :

$$h^{0[0k]} = G^{k\ell}_{,\ell} - G^{00}_{,k} \tag{1.8}$$

où pour la 3-impulsion

$$h^{i[0k]} = G^{0\ell}_{,\ell}\,\delta k - G^{0i}_{,k} \tag{1.9}$$

A partir de (1.8) on peut obtenir une expression de la masse du système M en fonction des composantes du tenseur métrique, dont la densité de masse est

$$\mu = \theta^{00} = \frac{1}{2\kappa} h^{0[0k]}_{,k} \tag{1.10}$$

Alors

$$M = \int \mu\, dV = \int \theta^{00} dV = \frac{1}{2\kappa}\int \left(G^{00}_{,k} - G^{00}_{,k}\right)_{,k} dV \tag{1.11}$$

Utilisant le théorème de Gauss, on réécrit (1.11) sous la forme :

$$M = \frac{1}{2\kappa}\oint \left(G^{\ell k}_{,\ell} - G^{00}_{,k}\right) dS_k \tag{1.12}$$

Le moment d'impulsion s'exprime comme

$$\begin{aligned} 2\kappa L^j &= \varepsilon_{jgi}\int x^g \left(G^{0k}_{,k}\delta^i_j - G^{0i}_{,k}\right)_{,k} dV \\ &= \varepsilon_{jgi}\oint \left(G^{0k}_{,k}\delta^i_j - G^{0i}_{,k}\right) dS_k \end{aligned} \tag{1.13}$$

En substituant (1.10) dans (1.3) on obtient l'expression suivante du moment quadrupolaire de la masse :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2\kappa}\int \left(G^{\ell k}_{,k} - G^{00}_{,k}\right)_{,k}\left(3x^i x^j - r^2\delta^i_j\right) dV \\ &= \frac{1}{2\kappa}\oint \left(G^{\ell k}_{,k} - G^{00}_{,k}\right)\left(3x^i x^j - r^2\delta^i_j\right) dS_k \\ &\quad - \frac{1}{2\kappa}\int \left(G^{\ell k}_{,k} - G^{00}_{,k}\right)\left(3x^i\delta^j_k + 3x^j\delta^i_k - 2x^k\delta^i_j\right) dV \\ &= \frac{1}{2\kappa}\oint \Big[\left(G^{\ell k}_{,k} - G^{00}_{,k}\right)\left(3x^i x^j - r^2\delta^i_j\right) + G^{00}\left(3\delta^i_k x^j + 3\delta^j_k x^i - 2x^k\delta^i_j\right) - \\ &\quad - G^{\ell k}\left(3\delta^i_\ell x^j + 3\delta^j_\ell x^i - 2x^\ell\delta^i_j\right)\Big] dS_k + \frac{1}{2\kappa}\int \left(6G^{ii} - 2G^{kk}\delta^i_j\right) dV\ . \end{aligned} \tag{1.14}$$

De même manière on peut trouver l'expression du tenseur de moment d'inertie se définissant comme :

$$J_{ij} = \int \mu\left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right) dV \tag{1.15}$$

En posant (1.10) dans (1.15) on obtient :

$$J_{ij} = \frac{1}{2\kappa}\Big[\Big(G^{00}_{,k} - G^{\ell k}_{,k}\Big)\Big(x^i x^j - r^2\delta^i_j\Big) - G^{00}\Big(\delta^i_k x^j + \delta^j_k x^i - 2x^k\delta^i_j\Big) +$$

$$+ G^{\ell k}\Big(\delta^i_\ell x^j + \delta^j_\ell x^i - 2x^\ell \delta^i_j\Big)\Big]dS_k + \frac{1}{2\kappa}\int\Big(2G^{ii} - 2G^{kk}\delta^i_j\Big)dV \ . \qquad (1.16)$$

Notons qu'en utilisant les formules ci-dessus, on trouve que les coordonnées harmoniques sont privilégiées parce que dans ces coordonnées $G^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$, et par suite toutes les integrales de volume dans (1.14) et (1.16) s'annulent. Les seules intégrales qui restent sont celles de surface qui contiennent G^{00} et $G^{00}_{,k}$.

Dans les paragraphes suivantes on va utiliser les formules (1.11) (1.14) (1.16) dans quelques solutions concrètes des équations d'Einstein.

ESSAI DE LA METRIQUE DE MISTSKIEVIC

La métrique de Mitsievic (Mitskievic, 1981) a été appelée métrique de «ficelle de lumière». C'est un cas particulier de l'onde de Peres possédant les propriétés stationnaires. Elle décrit le cas d'un courant de matière se déplaçant d'u mouvement rectiligne avec la vitesse de la lumière et elle peut être écrite sous la forme

$$dS^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \frac{2axy}{\rho^4}(dt - dz)^2 , \qquad (2.1)$$

où

$$\delta^{\mu\nu} = diag\,(+1, -1, -1, -1) \qquad (2.2)$$

Cette métrique appartient à l'ensemble des métriques de Kerr-Shild

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2H\ell_\mu \ell_\nu \, ; \quad g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} + 2H\ell^\mu \ell^\nu \qquad (2.3)$$

En prenant

$$H = \frac{axy}{\rho^4} \ ; \rho^2 = x^2 + y^2 \ ; \ell_\mu\, dx^\mu = dt - dz \qquad (2.4)$$

De (2.3) on tire

$$\ell_0 = -\ell_3 = 1 \ ; \ \ell_1 = \ell_2 = 0$$

En tenant compte que l'indice ℓ_μ du vecteur s'éléve et s'abaise à l'aide de la métrique cartésienne (2.2), $\ell_\mu \ \delta_{\mu\nu} = \ell^\nu$ on a $\ell^0 = \ell^3 = 1$; $\ell^1 = \ell^2 = 0$. il est donc facile de verifier l'isotropie du vecteur ℓ :

$$\ell_\mu \, \ell^\mu = 0$$

De (2.5) et (2.4) on tire toutes les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique :

$$g_{00} = 1 - 2H = 1 - \frac{2axy}{\rho^4} ,$$

$$g_{00} = 1 + 2H = 1 + \frac{2axy}{\rho^4},$$
$$g_{xx} = g^{xx} = g_{yy} = g^{yy} = 1,$$
$$g_{zz} = -1 - 2H = -1 - \frac{2axy}{\rho^4}\ ; \quad g^{zz} = -1 + \frac{2axy}{\rho^4} \tag{2.6}$$

(2.6) montrent que la métrique (2.1)est satisfaite aux conditions des coordonnées harmoniques $G^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$, et par suite en les utilisant dans l'expression de la masse-énergie (1.12) on obtient :

$$M = -\frac{1}{2\kappa}\oint G^{00}_{,k}\, dS_k = -\frac{1}{2\kappa}\oint G^{00}_{,k}\, dz\, d\varphi$$
$$-\frac{1}{2\kappa}\oint\left(\frac{\partial G^{00}}{\partial x}x + \frac{\partial G^{00}}{\partial y} + 0\right)d\varphi\, dz$$
$$= \frac{4a}{2\kappa}\oint\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\, d\varphi\, dz = 0\ ;$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$ (2.7)

En posant (2.6) dans (1.14) on peut exprimer les tenseur du moment quadrupolaire de la distribution de masse du système (2.1) sous la forme :

$$Dij = \frac{1}{2\kappa}\oint\frac{4axy}{\rho^4}\left(3x^i x^j - \rho^2\delta^i_j\right)d\varphi\, dz +$$
$$+\frac{1}{2\kappa}\int G^{00}_{,x}\left(3\delta^i_x x^j + 3\delta^j_x x^i - 2x\delta^i_j\right)\cdot \rho_j\, d\rho\, d\varphi\, dz +$$
$$+\frac{1}{2\kappa}\int G^{00}_{,y}\left(3\delta^i_y x^j + 3\delta^j_y x^i - 2y\delta^i_j\right)\cdot \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \tag{2.8}$$

Pour faciliter l'intégration de (2.8) on peut la prendre suivant un cylindre de longueur égale à l'unité (de $z = -½$ à $z = +½$). Avec ρ quelconque. Alors :

$$Dxx = \frac{1}{2\kappa}\oint\frac{4axy}{\rho^4}\left(3x^2 - \rho^2\right)d\varphi\, dz + \frac{1}{2\kappa}\int\left(\frac{2ay}{\rho^4} - \frac{8ax^2y}{\rho^6}\right)4x\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$
$$+\frac{1}{2\kappa}\int\frac{2ax}{\rho^4} - \frac{8ay^2x}{\rho^6}(-2y)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = 0\ . \tag{2.9}$$

De même on aura :
$D_{xx} = D_{yy} = D_{zz} = D_{xz} = D_{yz} = 0$

La seule composante différente de zéro est

$$D_{xy} = \frac{3a}{16G} . \tag{2.10}$$

G est ici la constante de gravitation.

Le résultat (2.7) (M=0) peut être interprété en supposant que le système est formé de masses positives et négatives. Tandis que les valeurs des composantes de D_{ij} du système (2.1) permettent de supposer qu'il y a des masses de signes différents le long des axes x et y ($D_{xx} = D_{yy} = 0$). Deux masses ayant la même valeur absolue mais de signes opposés possèdent un moment quardrupolaire égal à zéro :

$$D_{xx} = \int [m\delta(x - a + m\delta(x + a)](3x^2 - x^2)dx = 4ma^2 .$$

Les resultats (2.9,10) nous rappellent le cas d'une particule non-chargée – le neutron qui possède un seul moment quardrupolaire électrique différent de zéro.

De la même manière on peut calculer les composantes du tenseur du moment d'inertie. En effet, en posant (2.6) dans (1.16) on obtient :

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = J_{xz} = J_{yz} = 0 \; ; \; J_{xy} = a/16G . \tag{2.11}$$

En conclusion, la méthode de calcul des moments multipolaires et des autres caractéristiques intégrales des systèmes gravitant à l'aide de pseudotenseur de papapetrou est une méthode très simple. Elle peut être utilisée pour obtenir des résultats relativement exacts dans la plupart des métriques axiales – symétriques.

REFERENCES

Beig, R.and Simon, W. 1981. On the multipole expansion for stationary space- times. *Proc. Royal. Soc. London,* A376 : 333-341.

Clarke, C., Sciama, D. 1971. Static gravitational multipoles: the connection between field and sources in general relativity. *Gen. Rel. Grav*., 2 : 331.

Dandach, N. F. et Mitskievic, N.V. 1979. *Sur l'usage de pseudotenseurs dans le calcul des moments quadrupolaires.* Dans toute l'Union conf. sur les modernes problèmes de la géométrie. Minsk. USSR. p. 47. En Russe.

Fock, V.A. 1964. *The Theory of space, Time, and Gravitation*. Second revised edition Macmillan, New York.

Fodor, G. Honselaers, C. and Perjés, Z. 1989. Multipole moments of axisymmetric systems in relativity. *J. Math. Phys*., 30 : 2252-2257.

Geroch, R.. 1970 a. Multipole Moments I. *J. Math. Phys*., 11(1955): 1955-1961.

Geroch, R. 1970 b. Multipole Moments II *J. Math. Phys*., 11 : 2580-2588.

Hansen, R.O. 1979. Multipole moments of stationary space-time. *J.Phys. A: Math. Gen*., 12, M.7 : 1025-1028.

Hernandez, W. C. 1967. Material sources for the Kerr metric. *Phys. Rev.* 159: 1070.

Hoenselaers, C. 1976. Multipole moments of electrostatic space-time. *Prog. Theor. Phys*., 55: 406.

Mitskievic, N. V. 1976. Dans : *Problèmes de la théorie de gravitation et de particules élémentaires*. No. 7. Editeur : Stanyoukovich. Atomizd. Moscow. P.15-34. En Russe.

Mitskievic, N. V.. 1981. Gravitational field of a Pencil of Light. *Experi. Technik der Physik*. 29: 213.

O'connel, R.F. 1969. Procession of Schiss's proposed gyroscope in an arbitrary force field. *Lett. Nuovo Cim1*, 933.

Papapetrou, A. 1948. Einstein's theory of gravitation and flat space. *Proc. Royal Irish Acad*., A52 : 11.

Tanabe, Y. 1976. Multipole moments in general relativity. *Prog. Theor. Phys*., 55: 106-114.

Thorne, K.S. 1980. Multipole expansions of gravitational radiation. *R. Modern Phys*., 52(2): 299-339.

Tomimatsu, A. and Sato, H. 1973. New series of exact solutions for gravitational fields of spinning masses. *Prog.Theor. Phys*., 50: 95.

Voorhees, B. H. 1970. Static axially symmetric gravitational fields. *Phys. Rev*. D2: 2119.

Willmer, D.G. 1981. Multipole moments in general relativity. *J. Phys. A : Math. Gen*., 14 : 2653 - 2671.

Xanthopoulos, B. C. 1979. Multipole moments in general relativity. *J. Phys. A: Math. Gen.,* 12(7): 1025 - 1028.